



MariTerm AB

Snabba accelerationers inverkan på gods under transport



November 2001

Prof. Christian Högfors
CENTRE FOR BIOMECHANICS
P. O. Box 36046
SE-40013, Göteborg, Sweden

Eje Flodström, Anders Sjöbris
MariTerm AB
Box 12037
SE-402 41 Göteborg

FÖRFATTARE

Christian Högfors, Eje Flodström, Anders Sjöbris

TITEL

Snabba accelerationers inverkan på gods under transport

VINNOVA dnr

2001/03855

PUBLICERINGSDATUM

2001-12-10

UTGIVARE

MariTerm AB, Box 12037, 414 51 Göteborg

Snabba accelerationers inverkan på gods under transport

Innehåll

FÖRORD.....	2
INTRODUKTION	3
SAMMANFATTNING OCH RESULTAT.....	4
Accelerationer under transport.....	4
Vibrationer under transport	6
Sambandet mellan accelerationens amplitud och tidsvarighet.....	6
Summering	7
Rekommendationer	7
BAKGRUND TILL PROJEKTET	9
Problem relaterade till snabba accelerationer och mätningar av dessa	9
Kortvariga accelerationer, stötar	9
Tolkning av uppmätta accelerationer	9
Vibrationer	9
Separation av lokala vibrationer från ”stelkroppsaccelerationer”	9
Lämplig filtrering vid accelerationsmätning	10
"Skäliga" accelerationer vid järnvägstransport	10
Dimensionerande accelerationer vid transport	10
Dagens regler och anvisningar	10
Resultat av tidigare undersökningar	11
RÖRELSEDYNAMIK UNDER TRANSPORT I EN JÄRNVÄGSVAGN	12
Dynamik och accelerationer	12
Snabba accelerationer.....	12
Vagnrörelse	13
Deformationsdynamik	14
Påkänningar på järnvägsvagnar.....	15
Accelerationsnivåer och mätningar av dessa	15
Exempel på system utan interna resonanser.....	16
Moder och modmassor.....	18
Gods på accelererande underlag.....	19
SAMBANDET MELLAN ACCELERATION, TIDSVARIGHET OCH FÖRFLYTTNING.....	22
VERTIKALA VIBRATIONERS PÅVERKAN PÅ FRIKTIONEN	28
UTVÄRDERING AV MÄTNING.....	29
Bakgrund	29
Försökens genomförande	30
Filtrering av mätsignaler	30
Mätningen.....	32
FORTSATTA STUDIER	39
APPENDIX.....	40

FÖRORD

Detta projekt har genomförts för att genom teoretiska beräkningar och praktiska prov ta fram en handledning för utvärdering av accelerationsmätningar på gods under järnvägstransport.

Resultaten av projektet kan exempelvis användas av myndigheter som utformar regler för lastsäkring på lastbärare då de krafter som godset skall säkras för skall ansättas.

Resultatet kommer genom denna rapport att spridas till industrin så att risken för godskador eller andra skador på grund av godsets rörelse på lastbäraren kan minskas.

Projektet har genomförts av MariTerm med stöd för teoribildningen och analys av accelerationer från Prof. Christian Högfors CTH och Centrum för Biomekanik.

Projektet har finansierats av RailCombi, Volvo Logistics, och med anslag från Kommunikationsforskningsberedningen KFB och Banverket.

AssiDomän har bidragit med resultat från egna försök med gods på skakbord.

En referensgrupp till projektet har bestått av:

Leif Baude ordf.	RailCombi
Tomas Hermansson	Volvo Logistics
Thore Söderqvist	SCA Transforest
Hans Ring	Banverket
Karl-Inge Werkelin	Järnvägsinspektionen

Vi tackar för förtroendet att ha fått genomföra detta projekt som vi hoppas kommer att leda till ökad förståelse för den påverkan som gods utsätts för under transport och därmed bättre lastskydd.

Göteborg den 19 september 2001

Eje Flodström

INTRODUKTION

Gods under transport utsätts för olika typer av påkänningar på grund av accelerationer orsakade av fordonets rörelser. Om man tar ett fartyg som exempel, är de våginducerade accelerationerna måttligt höga med lång period. Gods i en järnvägsvagn kan å andra sidan påverkas av mycket höga accelerationer under mycket kort tid, exempelvis vid en rangerstöt. Mellan dessa två ytterlighetsalternativ finns hela skalan av accelerationspåverkan vid inbromsning, stötar och vibrationer orsakade av maskinerier, rälsskarvar, etc.

Resultatet av dessa olika typer av accelerationers påverkan på godset kan leda till godsskador på grund av att godset tippas eller glider, vilket i sin tur kan leda till skador på fordonet. I värsta fall kan det vara en avgörande faktor vid olyckor.

Det är ofta svårt att avgöra skälet till varför accelerationer som skadar godset uppstår. I exempelvis en järnvägstransport kan det vara av betydande intresse att klara ut om skadan beror på en rangerstöt och var den uppstått. Alternativt kan det röra sig om ojämnheter i banan eller för hög fart genom en växel. Det har därför blivit alltmer vanligt att avlastare låter utföra accelerationsmätningar under transporten. Dessa mätningar ger besked om accelerationsnivåer och varaktighet under hela eller delar av transporten. Mätningarna kan också ge exakt besked om vid vilken tidpunkt accelerationerna har uppstått. Dagens teknik erbjuder även möjlighet att bestämma exakt var accelerationen uppstått, men detta kräver avancerad utrustning.

Med relativt enkel utrustning ges möjligheten att mäta och få en mycket detaljerad bild av accelerationer till nivå och tidsvarighet. Det finns emellertid ett antal frågeställningar som är relevanta vid uttolkningen av mätningarna. De är hur godset påverkas av de accelerationer som uppmätts och om accelerationsnivån påverkat godset över huvud taget. Man kan även ifrågasätta vad som egentligen uppfångats av mätinstrumentet.

Accelerationer med låga frekvenser är relativt lätta att behandla teoretiskt. Mätningar och erfarenhetsdata visar, att de teoretiskt beräknade effekterna stämmer bra med vad som händer i verkligheten.

För högfrekventa accelerationer är däremot kunskapsläget sämre. Vid vilka kombinerade accelerationer börjar, exempelvis, godset att vibrera och vandra? Exempel på effekter av detta är skador som kallas "shavings" på pappersrullar. Hur friktionen påverkas mellan gods och lastbärare respektive mellan gods och gods vid vibrationer är en viktig frågeställning? Ett annat exempel är hur stor acceleration och hur stor tidsvarighet som krävs, för att ge den energimängd som krävs för att en godsenshet skall tippa.

För att de mätningar som nu ganska frekvent genomföres skall kunna tolkas har detta forskningsprojekt genomförts. Målsättningen har varit att det i projektet skall framkomma underlag och principer för hur accelerationsmätningar skall tolkas avseende påverkan på godset.

Projektet är indelat i tre delar.

- Utvärdering och mätning av accelerationer under transport på järnvägsvagnar
- Utvärdering av vertikala accelerationers påverkan på friktionen
- Redogörelse för energisambanden mellan stöt och effekt av stöt på kroppar, för att kunna tolka effekten av en accelerationspåverkan och dess konsekvenser under ett stötförlopp

Huvuddelen av projektets resurser har gått åt till att mäta och utvärdera accelerationer i järnvägsvagn under transport.

SAMMANFATTNING OCH RESULTAT

Accelerationer som påverkar gods under transport är av mycket skild karaktär och de skiljer mellan fordonsslag. I Tabell 1 visas de dimensionerande accelerationer som allmänt gäller idag för transport med olika transportmedel.

Tabell 1 Maximala påkänningar på lasten, som lasten skall säkras mot, för olika transportmedel.

	Framåt	Bakåt	Sidled	Vertikalled
Landsvägstransport	1 g	0,5 g	0,5 g	1 g
Järnväg	4 g	4 g	0,5 g (i kombination med 0,7 g nedåt vid glidning och 1 g vid tippning)	1,0 g / 0,7 g
Järnväg (kombi)	1 g (glidning) 0,6 g (tippning)	1 g (glidning) 0,6 g (tippning)	0,5 g (i kombination med 0,7 g nedåt vid glidning och 1 g vid tippning)	1,0 g / 0,7 g
Sjötransportområde A (Östersjön)	0,3 g	0,3 g	0,5 g	1 ± 0,5 g / 1,0 g
	(i kombination med 1 ± 0,5 g nedåt)			
Sjötransportområde B (Nordsjön)	0,3 g	0,3 g	0,7 g	1 ± 0,7 g / 1,0 g
	(i kombination med 1 ± 0,7 g nedåt)			
Sjötransportområde C (Nordatlanten)	0,4 g	0,4 g	0,8 g	1 ± 0,8 g / 1,0 g
	(i kombination med 1 ± 0,8 g nedåt)			

Säkring av gods under transport utförs för att förhindra uppkommande av fara för person, last, fordon eller egendom. Lastsäkringen skall därför utformas så att godset under icke exceptionella händelser, som olyckor, inte flyttar sig i sådan omfattning att fara uppkommer.

Järnvägen är det transportmedel som under de senaste åren varit speciellt granskat och där man infört skärpta krav på lastsäkring. Detta har ett samband med de ökade hastigheterna på järnvägen. De skärpta lastsäkringskraven har handikappat den intermodala järnvägens förmåga att transportera gods då de nya reglerna har högre lastsäkringskrav än landsvägstrafiken. Reglerna skapar särskilt problem genom att de minskar flexibiliteten att i ett sent skede av en transport välja att en lastenhet skall gå med järnväg istället för att dras med bil. Det handikappar även järnvägen som transportmedel i konkurrens med biltransporten då kraven på mer säkring ger högre hanteringskostnader.

De accelerationer som påverkar godset under transport kan delas in i tre kategorier:

- Enstaka stötar (tillfälliga snabba accelerationer)
- Vibrationer av högre frekvens
- Lågfrekventa accelerationer

I arbetet har inte rangerstötar beaktas eftersom de är kontrollerbara och av handhavande-karaktär. Handhavandet måste anpassas och säkerställas vid varje hantering så att ett minimum av påverkan sker på godset.

Accelerationer under transport

Genom mätning av accelerationer under transport med en kombivagn har ett underlag framtagits för analys. Mätningar har utförts på tåg i trafik på en olastad vagn, på en lastad vagn och på gods i en trailer under transport på en vagn.

Snabba accelerationers inverkan på gods under transport

För att ”rensa” mätvärdena från svängningar som inducerats av vagnens komponenter, det vill säga lokala svängningar och svängningar som kan liknas vid ljud, har dessa stämts av för vagnen och filtrerats bort i mätresultaten. Detta förfarande kallas att ”pinga” vagnen. För att få reda på vilka accelerationsnivåer som vagnens tyngdpunkt har under gång har därför ett filter konstruerats. Filtret används på de uppmätta accelerationsnivåerna vilket sedan ger vagnens reella accelerationer i tyngdpunkten. Det är alltså av stor vikt att notera att accelerationsnivåer som uppmäts av accelerometrar placerade på en vagn eller på gods ofta ger avsevärt större utslag än de accelerationer som vagnen som helhet har. De accelerationer som uppmäts räknas därför om så att enbart reella tyngdpunktsrörelser av vagnen som helhet kvarstår. Dessa tyngdpunktsrörelser räknas sedan om till statiska belastningar mot vilka säkring av godset behöver vidtas. I detta projekt avses med vagnens rörelse, rörelser i vagnens tyngdpunkt i sin helhet.

De accelerationer som under transport påverkar godset har en karaktär enligt Tabell 2 och Tabell 3 med det definierade filtret. Avsevärt högre accelerationer kan uppträda vid ovarsam rängering etc.

Tabell 2 Karaktären av filtrerad acceleration under transport med järnvägsvagn.

Acceleration (g)	$a_{\text{vertikalt}}$	$a_{\text{longitudinellt}}$	$a_{\text{transversellt}}$
lastad vagn	0,43	0,37	0,29
tom vagn	0,42	0,77	(0,97)*

* Placeringen av accelerometern var inte helt optimal utan har påverkats av lokala vibrationer från vagnsstrukturen.

De i Tabell 2 visade accelerationerna för lastad vagn bör även gälla för enheter som står på vagnen, container, växelflak, etc.

Analys av mätdata över tiden visar liten samtidighet i de maximala vertikala och horisontella accelerationerna. Den maximala horisontella accelerationen kan därför antas angripa vid 1 g vertikalt, se Appendix ”Accelerationsmätningar”.

Vid mätning i trailer på järnvägsvagn uppmättes en förstärkning upp till 3-dubbla amplituden av vagnens vertikala accelerationer vid låga frekvenser. Detta är ett resonansfenomen som beror på sammanfallande egenfrekvenser av vagnen och fjädringssystemet i trailern. Vid dessa tillfällen visar sig övriga accelerationer vara små. Trailern var av äldre typ med blad-fjädrar. Motsvarande fenomen kan uppkomma vid körning på väg med denna typ av trailer då en yttre påverkan från vägen eller dragbilen sammanfaller i frekvens med trailerns egenfrekvens.

Sammantaget beräknas att accelerationsbilden för transport på järnvägsvagn kan beskrivas med dimensionerande accelerationer enligt Tabell 3.

Tabell 3 Dimensionerande accelerationer under transport med järnvägsvagn.

Acceleration	$a_{\text{vertikalt}}$	$a_{\text{longitudinellt}}$	$a_{\text{transversellt}}$
g	0,5	0,4*	0,35*

* Samtidigt med statisk vertikal acceleration om 1 g.

Vibrationer under transport

De kvarhållande krafterna under transport är friktionskrafter och surrningskrafter. I de normala fallen surras inte massgods under järnvägstransport. Friktionen på drygt $\mu > 0,5$ är tillräcklig för att hålla produkterna på plats under transporten.

I en särskild studie har AssiDomän¹ visat att vertikalt svängande accelerationer som sammanfaller med produkternas egensvängning reducerar friktionen betydligt. För Assi Domäns produkter ligger dessa egensvängningar mellan 40 – 60 Hz vilket exempelvis är inom samma område som den frekvens som syllarna ger upphov till vid körning i normala hastigheter. Om vagnarna inte kan dämpa accelerationer vid dessa frekvenser uppkommer vandring av produkterna i vagnarna. Skador kan då uppkomma i form av ”shavings” då produkterna står och gnider mot varandra. Vandrande produkter kan under en transport med små yttre krafter gå mot dörrar eller sakta lyfta täckande huvar ur läge och på så sätt riskera att gods faller ur vagnar.

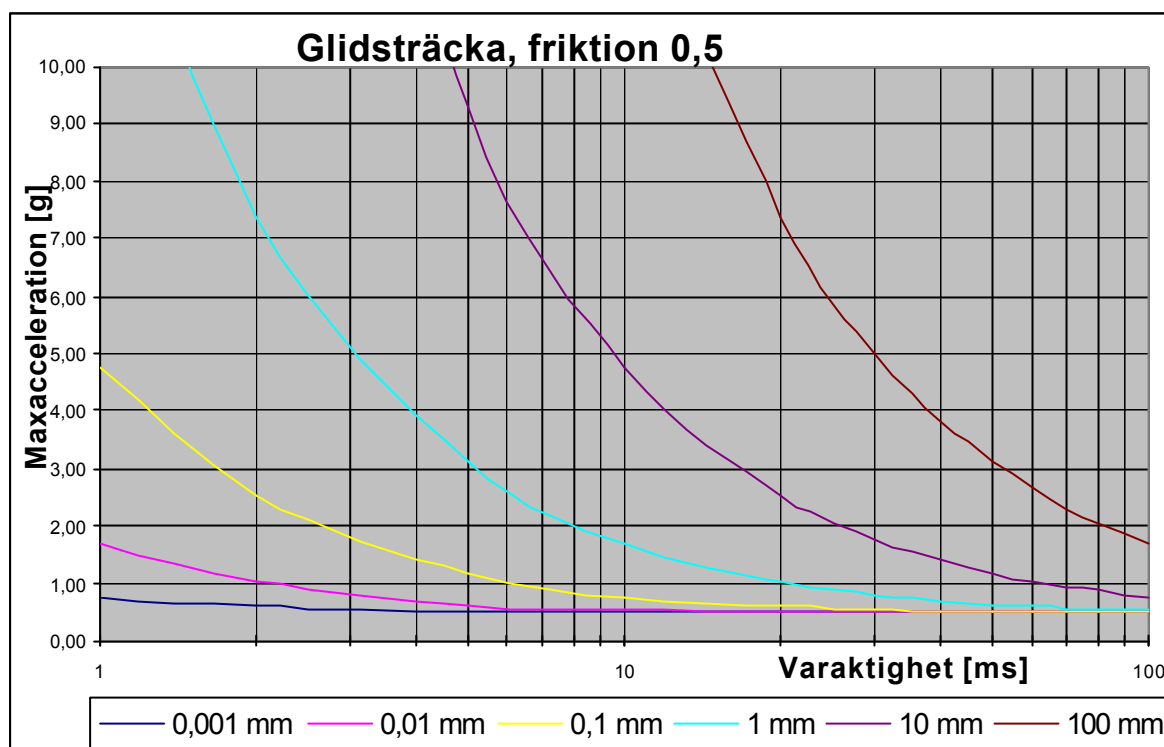
Det är inte några stora krafter eller hinder som behövs för att förhindra denna rörelse och vandring. För att klara gällande regler kan ofta en 50 mm hög kant runt produkterna räcka enligt normerna för vägtrafiken.

Lyckade tester har gjorts med vagn där man lagt in ett specialgolv som dämpar bort det aktuella frekvensområdet där produkterna egensvänger. Resultatet har givit att full friktion har kunnat behållas och att produkterna stått kvar oskadda under transporten. Utdämpning av accelerationer runt godsets egensvängningsområde ger stor effekt ur säkerhets- och godsskyddssynpunkt. Det är därför av stort värde att minska den påverkan dessa snabba vibrationer i vertikalled har.

Sambandet mellan accelerationens amplitud och tidsvarighet

Det som registreras av accelerometrar under transporter är normalt maxamplituden och tidsvarigheten för de största accelerationerna. I diagrammet i Figur 1 kan effekten av stötar utläsas i form av förflyttning av ”stelt”, ”odämpat” gods. Det framgår att det krävs mycket stora stötar för att få en rörelse som innebär en förflyttning av betydelse. Se vidare Figur 10 till Figur 16.

¹ Linerrullars rörelse i järnvägsvagnar, AssiDomän Kraftliner meddelande, 2000.



Figur 1 Diagrammet visar hur stor förflyttning en acceleration med viss maximal acceleration och tidsvarighet ger för en viss friktion mot underlaget

I de mätningar som gjorts har den maximala enstaka accelerationen (filtrerad) uppmätts till 0,4 g vilket inte ger någon förflyttning med normal friktion.

Summering

Den komplexa natur som en transport på järnväg uppvisar, innehåller dimensioner som inte kan omfattas av en studie av denna storlek. Likväl måste det finnas begränsningar vilken påverkan man skall beakta under en normal järnvägstransport och vad som kan betraktas som incidenter. Man beaktar normalt inte att lastbilar kör av vägbanan eller ned i djupa gropar som en del av vägtransporten. Lika lite bör man beakta att spårunderhållet vid vissa stationer och växelövergångar är så dåligt att stora accelerationer uppkommer när man går igenom dessa. Sådana ställen kan enkelt identifieras och det är av banhållarens intresse lika väl som operatörens att minimera effekten av en dålig bandel tills dess att den är åtgärdad. Mätningarna visar att de högsta accelerationerna uppnås på ett fåtal platser längs vägen och orsaken i de flesta fall bör gå att identifiera. Det lämpligaste sättet är att sänka hastigheten så mycket att man får ner påverkan på godset under passagen av dessa platser. I Appendix "Plott av positionssignal" och "Identifierade banavsnitt med höga accelerationer" visas exempel på indikation av höga accelerationer och dess geografiska läge där hög. Det lämpligaste är att vidta åtgärder vid dessa ställen.

Rekommendationer

En bild har skapats, genom de mätningar och beräkningar som gjorts, av komponenter i ett regelverk för säkra transporter på järnväg. Sammanfattningsvis summeras dessa nedan.

Accelerationer i banans riktning av betydelse uppkommer nästan uteslutande i samband med hantering. Det är därför handhavanderelaterat och bör regleras som sådant. Ur säkerhetssynpunkt bör därför operatören kunna fastställa vilka krafter som kan uppkomma på godset vid den typ av handhavande som används och själv specificera den säkring av lasten som krävs

Snabba accelerationers inverkan på gods under transport

efter detta. Ansvarvilar därför på operatören att tillse att den angivna maximala påverkan som kan uppkomma på godset under hanteringen inte överskrids.

Resultaten i studien tyder på att 0,5 g som dimensionerande acceleration i längdled bör vara mer än tillräcklig för att klara själva transporten på banan. Här är det dock av mycket stor betydelse att det inte finns onormala spel mellan vagnarna. Koppel måste alltså vara dragna etc. Högre accelerationsnivåer än 0,5 g har uppmätts på tomvagnar under transport. Sannolikt beror det på dynamiska krafter och styvheter i dämpningen av vagnarnas buffertar. Det är därför viktigt att koppel dras hårt, även vid dragning av vagnar och vagnar med mycket lätt last. Vidare bör tomvagnar företrädesvis gå sist i tåget.

Vertikala accelerationer är av mindre amplitud och av högre frekvens. Det har till exempel visats att frekvensområdet 40 – 60 Hz kan vara känsligt för enhetsgods. Gods som påverkas av denna frekvens kan komma i egensvängning och förflyttar sig lätt vid yttre horisontell påverkan, man får en så kallad ”vandring”. Denna effekt kan medföra betydande skador och utgör en säkerhetsrisk för transporter. Effekten åtgärdas på två sätt.

- Skydd för vandring arrangeras på samma sätt som i vägtrafikföreskrifterna.
- Vagnen tillverkas eller utrustas så att frekvenser inom farliga områden för godset är väl dämpade. Det är förhållandevis enkelt att dämpa ut accelerationer över 30 Hz.

Ett tredje åtgärdsalternativ, vilket järnvägen har valt idag, kan även användas, nämligen att kräva säkring för att reducera påverkan av vertikala vibrationer och snabba accelerationer. Denna åtgärd är olycklig då det får till verkan att man hämmar utvecklingen av järnvägstransporterna. Dessutom påverkar regeln även sådana transporter som inte är berörda av problemet, exempelvis kombitransporter. I kombitrafik finns godset i slutna lastbärare, där risken för att gods kan falla ut under transport är försumbar. I fallet semitrailertransport står godset på trailern som står på egna gummihjul vilka dämpar vertikala vibrationer. Godset är dessutom lastat och säkrat för att förhindra vandring enligt vägtrafikförordningen. Även växelflak är som kombienhet lastad enligt vägtrafikförordningen för att förhindra vandring.

Transversella accelerationer uppkommer i huvudsak på grund av spårkrafter som uppstår vid passager eller växelövergångar. Det har vid mätning visat sig att den maximala accelerationen är av storleksordningen 0,4 g. Förflyttningen vid en sådan påverkan är försumbar. Påverkan kommer dessutom slumpvis i samma storleksordning åt bägge sidor varför sannolikheten minskar för att få en stor vandring på grund av dessa accelerationer, om inte friktionen samtidigt är kraftigt nedsatt av högfrekventa vertikala accelerationer. Genom övriga åtgärder ovan minskas risken ytterligare för förflyttningar av betydelse. Transversella accelerationer bör därför inte anses som ett säkerhetsproblem.

Våra **förslag till åtgärder** är:

- att lastsäkring av gods vid järnvägstransport dimensioneras efter samma sidopåkänningskrav som vid vägtransporter, dvs 0,5g.
- att lastsäkring av gods vid järnvägstransport dimensioneras för påkänningen 0,5g i längsriktningen.
- att operatören åläggs att rangera och hantera vagnar så att påkänningen inte överskrids.
- att krav införs för förhindrande av vandring.
- att dåliga delar av bannätet, där höga accelerationsnivåer uppmätts, åtgärdas eller hastighetsbegränsas.

BAKGRUND TILL PROJEKTET

Problem relaterade till snabba accelerationer och mätningar av dessa

Kortvariga accelerationer, stötar

I samband med transport uppstår ibland yttre stötblastningar på transportmedel och lastbärare som sedan överförs till godset. Ibland genereras även stötar internt i transportmedlet genom att spel finns mellan olika delar som kan röra sig inbördes.

Normalt förekommer stötar med riktigt hög amplitud endast i samband med olyckor, på väg vid sammanstötning med något eller vertikalt vid bottnande fjädring. På sjön förekommer stötar vid sammanstötning eller grundkänning men även genom så kallad ”slamming”; hårda slag från vågor vid kombinationer av hög fart, hårt väder eller felaktigt utformat fartyg för sjöförhållandena.

På järnvägen förekommer fortfarande höga horisontella påkänningar vid rangering genom att vagnar och lok tillåts att rulla mot varandra med relativt hög fart. Slack i koppel, något som egentligen inte skall förekomma, kan ge upphov till ryck av relativt hög amplitud. Stötar av detta slag har i regel kort varaktighet och erfarenhetsmässigt är påverkan på godset liten. Det finns emellertid inte några större undersökningar av hur ofta man kan räkna med att sådana accelerationer uppkommer eller vilken fördelning de har i amplitud och varaktighet. Därmed kan man inte heller angripa problemet att antingen reducera påkänningarna eller säkra godset på ett teoretiskt godtagbart sätt.

Tolkning av uppmätta accelerationer

Det har blivit vanligt att fraktägare skickar med instrument med godset som registrerar och dokumenterar accelerationsincidenter under vägen. När en sådan incident registrerats är det emellertid svårt att avgöra dess inverkan på godset. Ett problem vid hanteringen av kortvariga accelerationer är att själva mätningen av dessa är förenad med stora osäkerheter vilket ger problem vid tolkningen. En stor fråga är exempelvis vad som egentligen har uppmätts. Mer om detta i avsnitten *Dynamik och accelerationer* och *Accelerationsnivåer och mätningar av dessa*.

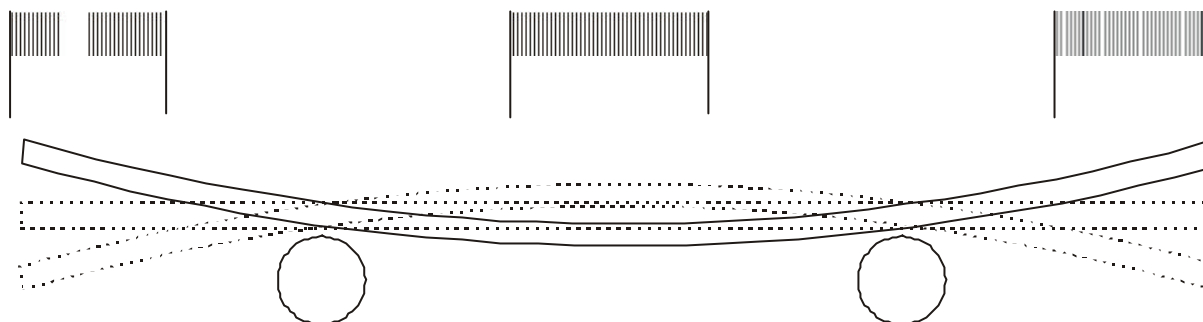
Vibrationer

Vibrationer i vertikalled hos underlaget för godset kan reducera den effektiva friktionen mellan gods och underlag. Detta kan, om det samtidigt utsätts för horisontella accelerationer, ge upphov till ”vandring” hos godset.

Separation av lokala vibrationer från ”stelkroppsaccelerationer”

Järnvägsvagnar och i viss mån fartyg har ofta mycket låg dämpning i själva strukturen. Vidare förekommer lösa detaljer på järnvägsvagnar som tillåts ”slamra” mot annan struktur. Detta kan ge upphov till lokala accelerationer av hög amplitud som kan registreras av en accelerometer. De höga lokala accelerationerna omfattar emellertid inte några stora massor och därmed inte heller någon energi som kan föras över till godset.

Av stort intresse är fordonets/fartygets rörelse som helhet, stelkroppsrorelse, samt de lägsta svängningsformerna, svängningsmoder, som kan inverka på delar av lasten. Till exempel kan den enklaste böjsvängningen av en vagn eller ett flak ge vertikala accelerationer i mitten eller i överhängande ändar enligt Figur 2.



Figur 2 Balksvängning i vertikalled och hur denna ger upphov till vertikala accelerationer.

Svängningar av högre ordningar saknar i regel intresse ur godsskyddssynpunkt men kan registreras av mätinstrument. Vid mätning måste därför de olika accelerationerna särskiljas på något sätt.

Lämplig filtrering vid accelerationsmätning

Vid utvärdering av en accelerationsmätning är det normala förfarandet att signalen får genomgå en lågpasfiltrering som tar bort höga frekvenser. Valet av filterfrekvens är direkt avgörande för vilka accelerationsnivåer som erhålls i slutändan.

Den normala lågpasfrekvensen som används av SJ är 8 Hz. Valet förlorar sig i historien men anses vara betingat av att vagnarnas fjädring normalt dämpar ut högre frekvenser.

"Skäliga" accelerationer vid järnvägstransport

SJ kräver idag att godset skall vara säkrat för en acceleration på 0,5 g i sidled samtidigt med en reduktion i den vertikala accelerationen på 0,3 g.

Järnvägens krav på dimensionerande accelerationer upplevs på många håll i transportbranschen som för högt ställda. Transportörer som frekvent sänder gods med järnväg i heltåg bedömer erfarenhetsmässigt att godset står kvar även då det inte är säkrat helt enligt normerna. Bedömningen är att omkring 0,5 g i sidoacceleration i kombination med fullt utvecklad tyngdkraft vertikalt (1 g) är tillräckligt, dvs ungefär samma krav som för vägtrafik.

Dimensionerande accelerationer vid transport

Dagens regler och anvisningar

Vägtrafik

För Vägtrafik föreskriver TSV att lasten skall vara säkrad för att klara accelerationerna

- 1 g framåt.
- 0,5 g bakåt och åt sidorna.

Dimensionerande accelerationer för vägtransporter baseras på praktiska försök, mätningar och beräkningar.

Snabba accelerationers inverkan på gods under transport

Järnväg

För järnväg i Sverige finns ännu inte några officiella regler från Järnvägsinspektionen men arbete pågår att utforma sådana regler. SJ:s regler, som för närvarande endast har civilrättslig status, används för närvarande även av andra operatörer.

För kombi – och heltåg som rangeras över vall gäller enligt SJF 638.1 följande regler:

- I längdriktningen: 1 g
- I tvärriktningen: 0,5 g vid samtidig reduktion av den vertikala kraften med 0,3g

Detta överensstämmer väl med internationella och andra länders nationella normer. I Österrike krävs dock säkring för 2 g i längdriktningen.

För vagnlaster finns ett krav att lasten skall kunna klara en kortvarig stöt med 4 g i längdriktningen. Då godset svårigen kan säkras för detta innebär det att godset måste ges utrymme att kunna glida en kort bit.

Sjöfart

För sjöfart tillämpas olika gränser beroende på vilka sjöfartsområden som trafikeras. I internationella rekommendationer² anges att lasten skall säkras för horisontella accelerationer i tvärskeppsled enligt:

- Sjöfartsområde A (Östersjön): 0,5 g
- Sjöfartsområde B (Nordsjön): 0,7 g
- Sjöfartsområde C (Nordatlanten): 0,8 g

Vertikalt antas 1g gälla.

I långskeppsled kombineras en given tvärskeppsacceleration med en varierande tyngdkraftsacceleration enligt:

- Sjöfartsområde A 0,3 g framåt/bakåt i kombination med vertikalacc. $1 \pm 0,5$ g
- Sjöfartsområde B 0,3 g framåt/bakåt i kombination med vertikalacc. $1 \pm 0,7$ g
- Sjöfartsområde C 0,4 g framåt/bakåt i kombination med vertikalacc. $1 \pm 0,8$ g

Dessa accelerationer är typiska värden för vad som kan inträffa vid en viss sannolikhetsnivå inom respektive sjöfartsområden för ett generellt fartyg.

Resultat av tidigare undersökningar

Järnvägsinspektionen lät under 1997-1998 utföra accelerationsmätningar på järnvägsvagnar. Problem uppstod med uttolkning av mätningen och val av lämplig lågpasfiltrering. En första bearbetning gav resultat med höga kombinerade accelerationer som uppenbart var orealistiska. Efter ytterligare bearbetning gjordes ett cirkelresonemang där lågpasfrekvensen valdes så att önskade accelerationsnivåer erhöles. Den slutligen valda frekvensen för filtrering var 8 Hz.

² IMO/ILO/UN ECE, 1997, *Guidelines for packing cargo transport units (CTUs)*.

RÖRELSEDYNAMIK UNDER TRANSPORT I EN JÄRNVÄGSVAGN

Dynamik och accelerationer

För att få en bakgrund till den mekanik som styr vagnen och godsets rörelser ges i detta avsnitt en kort beskrivning kring de samband som styr vagnen och lastens rörelser.

Snabba accelerationer

De mekaniska grund sambanden relaterar läge, tid och massa med kraftpåverkan. Om en fysisk kropp är liten i förhållande till relevanta längddimensioner (t.ex. en accelerometer i relation till en järnvägsvagn) kan dess läge approximeras med en punkt. För en kropp med påtaglig utsträckning blir lägesbeskrivningen mer komplex. Dels har varje (någorlunda) stel kropp en orientering. Dels kan varje reell kropp också deformeras. *Tankeexperiment: Ta en linjal. Placera ett valt ställe på linjalen på ett fixt ställe i rummet (punktläge). Vrid linjalen med bibehållet punktläge till en önskad inriktning (orientering). Med bibehållet punktläge och orientering kan linjalen böjas lite (deformeras).* I praktiken betyder detta att två samtidiga mätningar på en vagn kan uppvisa stora skillnader i mätvärden beroende på placering.

När vi i dagligt tal använder begreppen läge, hastighet och acceleration, avser vi oftast läget av en punkt, lägesförändring per tidsenhet och hastighetsförändring per tidsenhet respektive. I grundformen av de mekaniska lagarna är läget angivet i ett s.k. inertialt, i praktiken ofta jordfast, system. När lagarna omformuleras för andra system, tillkommer termer som beror på det nya systemets rörelse (tröghetseffekter).

När accelerometrar monteras på en järnvägsvagn som rör sig, mäts accelerationen för accelerometers fästpunkt i ett system som ligger fast i vagnen (alltså ej jordfast). Eftersom även accelerometrar lyder under fysikens lagar, betyder detta att accelerometern mäter den verkliga (i jordfast system) accelerationens storlek i riktningar relaterade till (den rörliga) vagnen.

Om ett försök omfattar hela perioden från att vagnen står stilla någonstans, till dess den står stilla nästa gång, innebär ovanstående att:

Den uppmätta längsaccelerationens integral, kompenserad för eventuell tyngdaccelerationskomponent, är längshastigheten. Denna är noll vid periodens slut.

Längshastighetens integral är den sträcka som färdats utefter banan. Vid periodens slut den totala sträcka vagnen har rört sig.

Den uppmätta tväraccelerationen är på ett komplicerat sätt relaterad till vagnens hastighet och rälsens krökningsradie förutom den lokala deformationen. Tväraccelerationens integral har ingen direkt fysikalisk innebörd. Jämfört med tidsförloppet för de lokala deformationerna är dock tröghetseffekterna långsamma eller små, då en vagn färdas på räls. Accelerationsvariationen på en kortare tidsskala kan därmed tolkas i absolut mening (och integreras).

Integralen av de snabba tväraccelerationerna över tider som fortfarande är små, jämfört med tröghetseffekternas tidskala, kan tolkas som en tvärhastighet och skall ha medelvärde noll.

Vid påtaglig slingringsrörelse, som tidsmässigt är intermediär mellan de snabba accelerationerna och tröghetsvariationerna, bör denna kunna detekteras vid lämpligt val av tidsskala.

Tvärhastighetens (enl. ovan) integral över korta tider har på samma sätt en tolkning som tvärförskjutning, vars medelvärde också skall vara noll.

Snabba accelerationers inverkan på gods under transport

För den uppmätta vertikalaaccelerationen³, kompenserad för tyngdaccelerationen (eller komponent därav), gäller samma överväganden som för tväraccelerationen. Tröghetseffekterna är dock mindre (eftersom de vertikala tröghetsradierna är större än de horisontella).

Vid tidigare nämnd normsättning tas framför allt hänsyn till de långsammare accelerationerna (inbromsning, tröghetseffekter vid kurvtagning, inverkan av lutning etc.). Dessa har i allmänhet ett tidsförlopp som har flera sekunders varaktighet. Utan att närmare gå in på hur de framtagits visar jämförelse mellan de dimensionerande accelerationerna för bil (norm) och förslagen praxis (TFK, rangering undantagen) i nedanstående tabell, att snabbare accelerationer någonstans beaktats.

FORDON/RIKTNING	Framåt	Bakåt	Sidled
Bil	1 g	0,5 g	0,5 g
Järnväg (kombi)	1 g	1 g	0,3 g

De lika värdena framåt och bakåt på järnväg reflekterar det faktum att en järnvägsvagn kan gå i tåg åt bägge hållen. Storleken antyder att inbromsning normalt kan vara effektivare för bil än för tåg. En enkel analys visar dock att den dimensionerande accelerationen i längdled för järnvägstransport motsvarar en stoppsträcka på c:a 170 m från 130 km/tim och erfordrar, tolkad på detta sätt, en friktionskoefficient mellan hjul och räls på just 1,0. (Den är i verkligheten endast av storleksordningen 0,2 och kan i sig ge upphov till en långsacceleration på maximalt 0,2 g.) Det är alltså inte den teoretiskt möjliga "långsamma" retardationen av hela tåget som är den dimensionerande accelerationen. Snabba accelerationer, t. ex. inverkan av slack i kopplingar mellan vagnar eller vertikala stötar, har alltså på något sätt beaktats, då denna dimensionerande acceleration föreslagits (jfr *Påkänningar på järnvägsvagnar*).

Som synes av den tidigare diskussionen av accelerationsintegraler, behöver vi, för att ge fysikalisk innebörd åt accelerationsintegraler, betrakta snabba förlopp, d. v. s. skeenden som äger rum på avsevärt kortare tider än de sekundförlopp, som karakteriserar de långsamma accelerationerna. Den önskade noggrannheten i analysen avgör hur korta samplingsintervall som krävs. Som en tumregel kan man säga att det förväntade felet är av samma storleksordning som den relativa upplösningen. Observera dock att felet kan ackumuleras vid integration. När vi diskuterar snabba accelerationer, kan vi alltså grovt uppskatta att vi har en noggrannhet på procentnivå vid förlopp snabbare än någon tiondels sekunds varaktighet. I intervallet 2 – 10 Hz kan noggrannheten gå ned en storleksordning. Under alla omständigheter finner vi att begreppet snabba accelerationer bör inskränka sig till accelerationsförlopp karakteriserade av tider om delar av sekunder.

Ovanstående resonemang är inte heltäckande avseende den relativa noggrannheten, vari även amplitudförhållandet ingår. En alternativ karakterisering av snabba accelerationer, som också tar hänsyn till dess relativa betydelse, baseras på accelerationsderivatan. En sådan karakteristik är att föredra vid kortvariga transienta förlopp. Viktiga snabba accelerationer kan då urskiljas med tidsderivata större än 0,1 g/s.

Vagnrörelse

När accelerationen mäts i en eller flera punkter på en vagn erhålls ett mått på hur just denna vagnsdel rör sig. Den acceleration godset känner beror på accelerationen över hela

³ Vertikal relativt vagnen, då den står plant.

Snabba accelerationers inverkan på gods under transport

kontaktytan mellan gods och vagn. Punkter i denna kontaktyta är dock inte tillgängliga för mätningar. *(Vi kan mäta accelerationen i en punkt på en fiolsträng. Utan mycket övrig information säger denna mätning ingenting om hur fingret som trycker strängen mot tonbrädan accelereras.)*

En lastad järnvägsvagn påverkas av kontaktkrafter utifrån (verkande på vagnen) samt tyngdkraft och, i det system vi mäter, tröghetskrafter. Enligt mekanikens lagar ger dessa krafter upphov till en väldefinierad acceleration för vagnens och lastens gemensamma tyngdpunkt. I de fall speciella resonansförhållanden inte föreligger och lastförskjutning inte sker, rör sig vagnens och lastens tyngdpunkter nästan likadant. När lastens massa är av samma storleksordning som vagnens utgör således vagnens tyngdpunktsacceleration ett relevant mått på den acceleration lasten utsätts för.

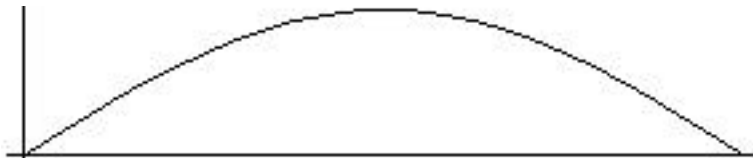
Deformationsdynamik

Rörelsen hos en kropp bestäms av rörelseekvationer, konstitutiva samband, randvillkor och begynnelsevillkor. Dessa ekvationer återges i Appendix "Mekaniska Vibrationer".

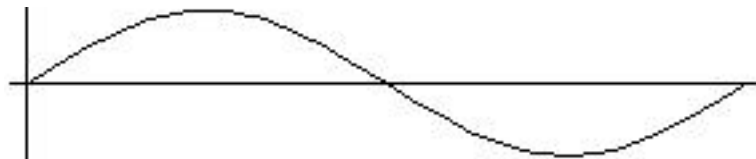
För stela kroppar övergår de partiella differentialekvationerna i de vanliga stelkroppsekvationerna för impuls (kraftlagen) och impulsmoment (impulsmomentlagen).

Om vi ur deformationsekvationerna härleder en ekvation för små fria störningar, får vi en s.k. vågekvation, en ekvation som beskriver vågutbredning. Tillfogas randvillkoren till vågutbredningsekvationen, erhålles svängningsekvationen för systemet.

En svängningsekvation karakteriseras av ett diskret spektrum och associerade moder. För enklart kan man säga att vibrationsrörelsen hos det betraktade systemet alltid kan betraktas som innehållande endast de frekvenser, som finns i spektrum. Rörelsen med en viss frekvens är förbunden med ett bestämt deformationsmönster i kroppen. *Jämför med en sträng, där grundtonen (punkt i spektrum) hänger ihop med en strängdeformation:*



Den första övertonen (nästa punkt i spektrum) har en annorlunda form på sin typiska deformation



När utslagen varierar i tiden, sker det med en bestämd frekvens och alla punkter passerar jämviktsläget samtidigt. Observera att modformen inte har någon naturlig skala, utan har snarare egenskaper som en riktning. Jämför med att nordnordväst inte säger något om avståndet. Modformerna har därutöver den användbara egenskapen att varje kroppsform som uppfyller randvillkoren kan skrivas som en viktad (med storleksangivelser) summa av modformer. Kroppens form kan alltså i varje ögonblick beskrivas med en viktad summa av kroppens moder. Moderna har dessutom s.k. ortogonalitetsegenskaper, som gör att i frånvaro av extern drivning fungerar moderna som okopplade linjära svängare. Dessa svängare får då en definitiv frekvens enbart. Man kan dock associera massa och styvhet till de olika svängarna på skilda sätt, t. ex. genom att beakta vilken energi som åtgår för att excitera svängaren till en vald amplitud.

Normalt refererar modbegreppet till en deformationsrörelse. Om kroppen därutöver som helhet har en viss rörelsemöjlighet till sin omgivning, men är begränsad av återförande krafter, kan

Snabba accelerationers inverkan på gods under transport

även kroppens rörelse som stel kropp betraktas som en eller flera moder. Gemensamt för denna eller dessa moder är att modmassan utgörs av kroppens fysiska massa, medan frekvensen är beroende på den återförande kraftens karaktär. Dylika återförande krafter har oftast rent fysiska angreppsställen på kroppen (hjulens kontakt med rälsen) och leder till deformationsförändringar i kroppen, då den återförande kraften varierar. Stelkroppsrörelser är därmed oftast kopplade till de interna moderna. En sådan koppling finns även i de fall då stelkroppsrörelsen inte har modkaraktär.

Påkänningar på järnvägsvagnar

En järnvägsvagn utsätts för kraftpåverkan med olika ursprung. Påverkan i längdled kommer, som väntat, huvudsakligen från kontakten med andra vagnar. Denna kontakt är normalt ganska mjuk, med långa veka fjädrar i buffertarna. Vid koppelglapp eller vid rängering kan dock större accelerationer överföras. Även fallet med stora skillnader i massa mellan olika vagnar i ett tåg kan ge upphov till accelerationer i längdled.

Större påverkan i vertikalled under gång har sin huvudsakliga orsak i rälskarvpassager. Den belastade rälen trycks ned, och hjulen möter ett vertikalt språng, då de går över på den hittills obelastade rälen. Denna påverkan ger även upphov till viss acceleration i längdled, men kan framför allt på grund av geometri vid räls och hjul ge upphov till stötar i sidled.

Ren sidledspåverkan resulterande i snabba accelerationer i en godsvagn, härrör huvudsakligen från hjulkonstruktionen. Hjulen i ett hjulpar roterar lika snabbt, då de sitter fast på samma axel. Med plan slitbana kan ett sådant hjulpar inte svänga, utan att glida. Slitbanan har därför en konisk form (jfr differentialen på en bil), som möjliggör kurvtagning. Denna koniska form skapar ett självreglerande system, som uppvisar vissa problem (hunting), vid körning på rak räls. De självsvängningar som uppstår via denna reglermekanism, s.k. sinusgång, ger tämligen frekvent upphov till kraftiga stötar mellan räls och hjulflänsar. Då friktionsdämpning används, kan dessa sidostötar även ge upphov till vertikal acceleration.

Vertikal- och sidledspåkänningar påverkar enligt ovan i första hand hjulen. Stötarna transmitteras genom bogginas fjäder-dämp-system och leds vidare i strukturen, i styrningar och i friktionsdämpare.

Accelerationsnivåer och mätningar av dessa

En järnvägsvagn med låsta hjul har en friktion mellan hjul och räls på mindre än $\mu=0,2$. Ett tågsätt som helhet kan därför varken accelereras eller bromsas med mer än 0,2 g. På motsvarande sätt begränsar friktionen accelerationen av last (eller del av last). En last som står på underlaget, kan som helhet inte via lastbärarens rörelse få en högre acceleration än μg , där $0 < \mu < 1$ är friktionskoefficienten mellan last och underlag. Likafullt är det uppenbarligen så, att när accelerometrar monterats på en stillastående vagn, kan de understundom ge mycket höga utslag (>3 g) när man stampar till på vagnen. Accelerometrar monterade på last (eller olika former av lastloggar) kan under gång uppvisa accelerationstoppar, som är ännu mycket större, utan att märkbara konsekvenser av att lastbäraren skulle ha haft denna acceleration kan upptäckas.

Förklaringen finns i Dynamikavsnittet, *Dynamik och accelerationer*. Inga kroppar, vare sig last eller lastbärare, är helt stela. När de påverkas av krafter deformeras de, vilket ger upphov till svängningar. Kroppens tyngdpunkt får en acceleration motsvarande den verkande kraften, men olika delar av kroppen rör sig på olika sätt. Accelerationen kan variera avsevärt över kroppen.

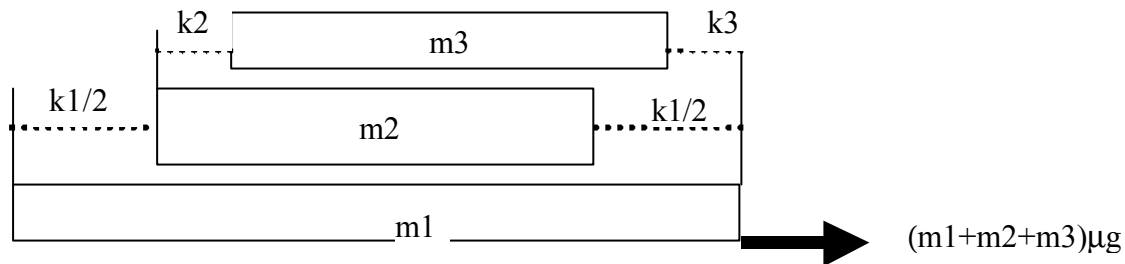
Om en vagn utsätts för en acceleration a i sidled, så borde lasten som står på flaket få en acceleration på högst μg (om $a > \mu g$) enligt resonemanget ovan. Kan då delar av lasten få mångdubbelt högre accelerationsnivåer? Svaret är trivialt ja, om det förekommer kopplade degene-

Snabba accelerationers inverkan på gods under transport

rerade moder. I icke-degenererade system är svaret också (mindre trivialt) ja, under förutsättning att de storheter, som beskriver systemet, ligger i vissa intervall.

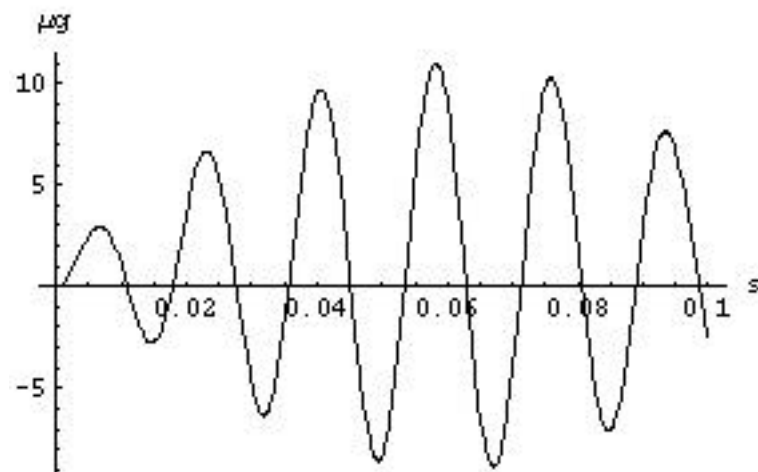
Exempel på system utan interna resonanser

Det enklaste möjliga system, som inte kan uppvisa interna resonanser finns redovisat i Appendix "Ett accelerationssökande system". Systemet tänks stå på ett underlag som accelereras, varvid, om underlagets acceleration är tillräckligt stor, en kraft på μg multiplicerad med lastens massa påverkar den undre delen av lasten. I stället för det oändliga antal moder, som är associerade med en kontinuerlig kropp, får kroppen här ha endast två deformationsmoder, kopplade så att internresonans ej kan uppstå.



Figur 3 System utan interna resonanser bestående av ett underlag och två kopplade massor.

Detta idealiserade system, där de brutna strecken representerar fjädrar, kan ge hur stor accelerationsamplitud som helst, om systemet görs tillräckligt topptungt och fjäderstyvheterna är anpassade. Med värdena $massa_1=3$ ton, $massa_2=0,9$ ton, $massa_3=14,5$ ton, $k_1=45$ MN/m, $k_2=63$ MN/m, och $k_3=271$ MN/m får $massa_2$ en maximal acceleration om c:a $10 \mu g$, när underlaget har så hög acceleration att glidning inträder. Systemets egenfrekvenser är då c:a 52 Hz och 60 Hz.

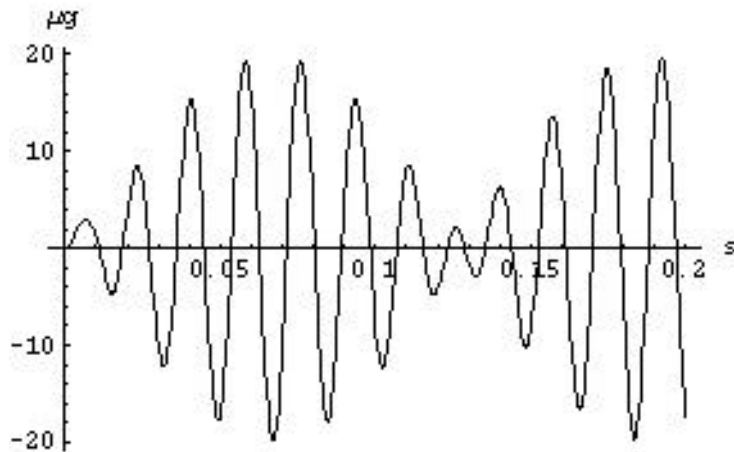


Figur 4 Figuren visar accelerationssvaret på att underlaget vid tiden 0 ges en acceleration överstigande mg . Observera att svaret i m_2 är 10 gånger större.

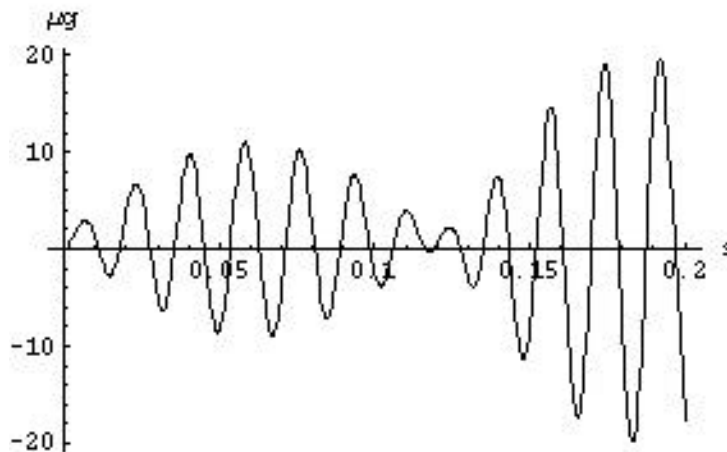
Den stora amplituden i accelerationstoppen uppnås i detta fall inte omedelbart efter att lasten börjat glida utan efter c:a 50 ms.

När accelerationen av underlaget upphör, påverkas också accelerationen av $massa_2$. Den kan ytterligare förstöras, men också förminsкас. Det finns inget enkelt samband mellan accelerationspulsens på underlaget tidsvarighet och den effekt den får, mätt i acceleration av $massa_2$.

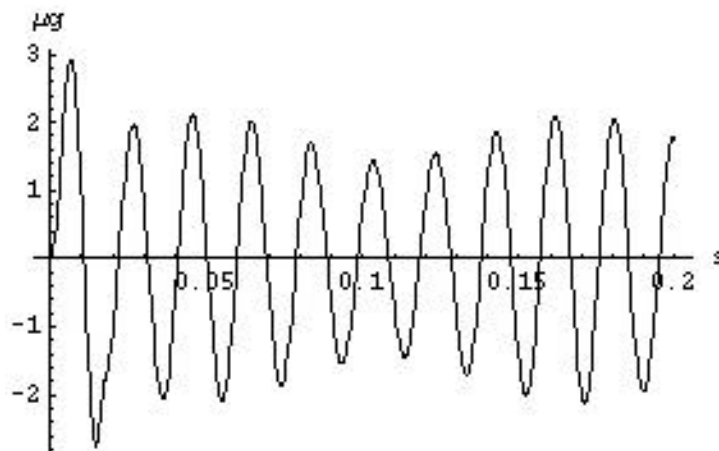
Snabba accelerationers inverkan på gods under transport



Figur 5 Denna figur visar accelerationssvaret hos m_2 , när underlaget ges en accelerationspuls överstigande mg i 0,009 sekunder, d. v. s. drivningen upphör strax före det första nollstället i m_2 's acceleration. Den maximala accelerationen för m_2 är nästan 20-faldigad, jämfört med underlagets.



Figur 6 Denna figur visar liksom ovanstående svaret på en accelerationspuls, här med 0,125 sekunders varaktighet (14 ggr längre än ovan). Även här blir det maximala svaret c:a 20 gånger större än excitationen.



Figur 7 Denna figur visar, liksom de ovanstående, svaret på en accelerationspuls. Pulsen är här av 0,0165 sekunders varaktighet (knappt dubbelt så lång som den kortaste pulsen). Här blir det maximala svaret c:a 3 gånger större än excitationen, 1/7 av vad den hälften så korta pulsen åstadkommer.

Snabba accelerationers inverkan på gods under transport

Den matematiskt initierade genomskådar säkerligen mekanismen. Om pulsen avslutas i rätt ögonblick, kan önskad effekt, förstöring eller förminskning, åstadkommas. Pulsens absoluta varaktighet spelar i detta sammanhang en mindre roll.

Slutsatsen är att enstaka accelerationsmätningar på last eller vagn ej kan uttolkas, då den uppmätta accelerationen inte återspeglar tyngdpunktsaccelerationen, med mindre avsevärt större kännedom om systemets svängningsegenskaper är för handen. Detsamma kan sägas om varaktigheten av en accelerationspuls.

Moder och modmassor

Som framgår av avsnittet *Accelerationsnivåer och mätningar av dessa*, är det vanskligt att uttala sig om de accelerationer, som vagn och last utsätts för, med utgångspunkt i enskilda mätresultat. Eftersom alla kroppar de facto är deformerbare, mäter varje accelerometer bidrag från ett antal moder, beroende på accelerometerns placering.

Vad är då en mod i enkla termer? En mod, som den definierats i avsnittet *Dynamik*, är ett matematiskt objekt, en geometrisk form, som beror på kroppens geometri, elastiska egenskaper och randvillkor. De senare uttrycker växelverkan med omgivningen såsom om kroppen påverkas av krafter någonstans, om den sitter fast någonstans etc.

I det förenklade exempel som använts i avsnittet *Exempel på system utan interna resonanser* är moderna (onormaliserade) $\{1, 1, 1\}$, $\{-3.05, -5.95, 1\}$ och $\{11.63, 22.63, 1\}$ med tillhörande egenfrekvenser 0 Hz, 51.75 Hz och 60 Hz. Den första moden har frekvensen 0 (ingen svängning) och modformen $\{1, 1, 1\}$ utsäger att massorna rör sig i förhållande 1/1/1, det vill säga lika mycket och åt samma håll. Den andra moden har en frekvens strax under 52 Hz och modformen $\{-3.05, -5.95, 1\}$, det vill säga när massa₃ rör sig 1 längdenhet åt höger (vänster), så går massa₂ nästan 6 gånger så långt åt vänster (höger) och m₁ drygt hälften av massa₂'s förskjutning, likaledes åt vänster (höger). Den tredje moden med frekvensen 60 Hz karakteriseras av att det väsentligen är massa₁ och massa₂ som rör sig åt var sitt håll; massa₂ nästan dubbelt så mycket som massa₁. En modform är associerad med en bestämd frekvens och formen uttrycker alltså förhållandena mellan olika delars förskjutning. Det torde vara uppenbart, att i de svängande moderna rör sig hela systemets tyngdpunkt mindre än de enskilda kropparna.

- Det är möjligt för en elastisk kropp att röra sig i en enda mod, det vill säga det tidsberoende förskjutningsfältet rör sig synkront med en enda frekvens, och alla delar passerar jämviktsläget samtidigt. Det senare innebär att delarna antingen är helt i fas, eller helt ur fas.
- Varje deformationsrörelse hos systemet kan beskrivas som en viktad summa av modrörelser. Vikterna i denna summa, modamplituderna, är tidsberoende endast då systemet utsätts för yttre drivning. Rörelseekvationen för en mod är en enkel harmonisk svängningsekvation, inhomogen då systemet är drivet.

Eftersom moder är att betrakta som matematiska objekt, karakteriserade av form och frekvens, den senare fysikaliskt sett beroende på en kvot mellan styvhet och massa, finns det många olika sätt att definiera begreppet modmassa, d. v. s. den massa som är förbunden med moden. Oavsett vilken av dessa möjliga modmassebegrepp som används, är det lätt att visa att förhållandet mellan kroppens tyngdpunktsförskjutning och modamplituden är mindre än modmassan dividerad med hela kroppens massa. Om vi då låter modens amplitud beskrivas av den största fysikaliska förskjutning någon punkt i kroppen utsätts för vid rörelse i modens frekvens, blir ovanstående kvoter meningsfulla. Vi får ett instrument att analysera vilken effekt vi högst kan förväntas ha på vagn och last, när vi mäter effekten på moderna. Det är även att beakta att svängning i högre moder generellt påverkar tyngdpunktens rörelse mindre än rörelse i lägre moder. Antisymmetriska modrörelser lämnar tyngdpunkten i vila.

Snabba accelerationers inverkan på gods under transport

Utan detaljerad kännedom om ett systems struktur kan man alltså dra slutsatser rörande den acceleration systemet som helhet utsätts för, från mätningar av accelerationen i ett antal utvalda punkter. Detta naturligtvis under förutsättning att man på något sätt har skaffat sig information om systemets modmassor. Det senare görs lämpligen genom s. k. pingning av systemet, d. v. s. någorlunda kontrollerade energimängder tillförs systemet på olika sätt.

Mer eller mindre sofistikerade metoder kan användas för modmasseanalysen. Den enklaste, som också överskattar dessa massor mest, utgår från att, efter att modfrekvenserna identifierats och en grov uppskattning av formerna gjorts, all tillförd energi ligger i en enskild mod. Om man hittat säg tre moder, så räknar man alltså ut modmassan tillhörig en viss frekvens, genom att i tur och ordning låtsas som om all energi är koncentrerad till denna frekvens. En noggrannare analys låter sig genomföra, om hänsyn tas till fasinformation, effekten av dämpning i systemet, olika frekvensfönsters bidrag till amplitudtoppar i tidsplanet etc.

Konservativt beräknade modmassor för den aktuella vagntypen⁴ ligger i genomsnitt kring 200 kg. I jämförelse med exempelvis hela vagnens vikt på 15 ton kan detta anses som lite. Resonanser i vertikalled med frekvenser kring 7 Hz, 23 Hz och 33 Hz har uppmätts där resonanser kring 33 Hz ger den värsta påverkan ur godsskyddssynpunkt. I sidled förekommer också resonanser, dock mindre skarpa. Mest framträdande är här 24 Hz, 26 Hz och 34 Hz. I vissa försök synes en gemensam, hårt dämpad, lågfrekvent resonans i 2 Hz-området föreligga.

Den starka kopplingen mellan vertikal- och sidledsrörelser gör det vanskligt att bestämma den effektiva modmassan, för användning då enbart en enstaka accelerometer (horisontell eller vertikal) skall uttolkas. Små skillnader i excitationen kan göra att en större del av energin manifesteras huvudsakligen i en av riktningarna. För att vara på den säkra sidan bör, vid singelaccelerometertolkning, massorna övervärderas. De experimentella resultaten visar att en genomgående modmassa på 700 kg klarar alla uppställda kriterier. Frekvensområdet från 2 Hz och uppåt kan följaktligen reduceras med en faktor på minst 20, d.v.s. vagnens tyngdpunkt accelereras mindre än 5 % av den i enskild punkt uppmätta accelerationen i sidled eller vertikalled.

Acceleration i längdled synes vara försumbar, vid adekvat vagnhantering.

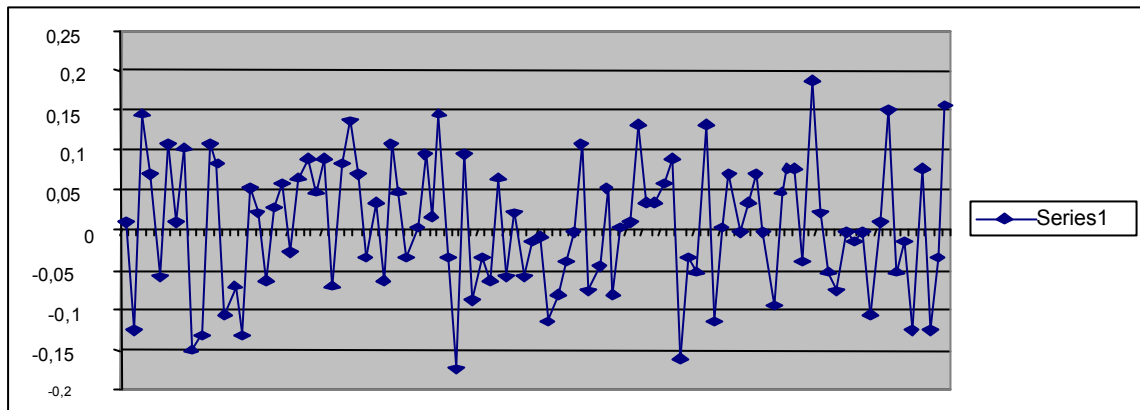
En viss försiktighet i tolkningen torde vara av nöden i området 2 – 8 Hz (jfr. tidigare analys av snabba accelerationer).

En översiktlig analys av de experimentella resultaten och bearbetningsmetoderna finns i Appendix "Frekvensspektra".

Gods på accelererande underlag

Ett *vibrationsförlopp* beskrivs av en accelerationskurva med ett medelvärde nära noll och många ofta oregelbundet förekommande nollställ. Amplituden är generellt måttlig. En vibration har också en påtaglig varaktighet.

⁴ På vilken accelerationsmätningarna i projektet utförts.



Figur 8 Vibrationer med amplitud nära noll.

Ett stötförlopp å andra sidan karakteriseras av en kort varaktighet och stor amplitud, en ”spik” i den uppmätta accelerationen. Accelerationsderivatan, brantheten i accelerationskurvan, är tillsammans med den absoluta accelerationsnivån ett viktigt mått. Som också diskuterades inledningsvis, avses i denna studie med snabba accelerationer, förlopp med varaktighet av delar av sekunder, med en möjlig brist i noggrannhet i intervallet 2 – 10 Hz.

Utgångspunkten är att det framför allt är fyra förlopp som inte är önskvärda: förskjutning, vältning, gnidning samt bestående deformation av godset.

Förskjutning av en *helt stel kropp* inträder när förhållandet mellan underlagets accelerationer i horisontell led och vertikal led överstiger friktionen mellan last och underlag. En rektangulär accelerationsstöt av underlaget i horisontell led med höjd A och varaktighet t ger upphov till en förskjutning $\frac{(A - mg)t^2}{2}$. En triangulär stöt med samma höjd ger endast en sjättedel så stor förskjutning. m är friktionskoefficienten och g tyngdaccelerationen. (I mer populära termer: Om en bordsduk dras undan med accelerationen $A > mg$ och accelerationen hålles konstant, så rör sig duken $\frac{A}{mg}$ gånger så långt som servisen. Om dukens dras 1 m med accelerationen 5g

och friktionskoefficienten är 0,6, så rör sig servisen 12 cm. Förskjutningen mellan duken och servisen blir 88 cm.) Ett åskådningsexempel: På en olastad vagn med vikten 10 ton uppskattas en horisontell acceleration på 5g (på hela vagnen) under 50 ms. Efter denna accelerationsstöt har vagnen rört sig drygt 6 cm, men har fortfarande en hastighet på 2,5 m/s (9 km/h) som så småningom bromsas upp av en motriktad acceleration. Energin som överförs till vagnen är drygt 31 kWs. Om den sidförande kraften är densamma på en vagn lastad med en klump på 20 ton, och kraftens varaktighet likaledes densamma, kommer vagnen att röra sig 5 cm åt sidan, medan lasten endast rört sig drygt 6 mm. En förskjutning på knappt 4,5 cm har uppstått. Det arbete kraften utträttat har sjunkit till 25 kWs, men energin hos vagn + last är ”bara” drygt 20 kWs, ty friktionen har förbrukat ca 4,5 kWs. I bägge fallen är dock den överförda impulsen 25000 Ns. Med ett strävt, lite mjukare, dämpande underlag sker ingen förskjutning.

Är lasten inte helt stel, eller om ett mjukare mellanlägg finns mellan last och vagn, inträder glidning senare. Ju stelare lasten i sig är och ju mindre konciliant underlaget, desto mer liknar förloppet stelkroppapproximationen.

En samtidig horisontell vibration i underlaget, överlagrad den horisontella accelerationspulsen, kan påverka förskjutningen. Denna påverkan är dock maximalt begränsad till vibrationens rumsliga amplitud, oberoende av stöts varaktighet.

Snabba accelerationers inverkan på gods under transport

Vibrationer i lodrät led med amplitud mindre än *tyngdaccelerationen* g kan, i samverkan med horisontella accelerationer, också ge bidrag till den horisontella förskjutningen av gods på vagnen. Bidraget från lodräta vibrationer är begränsat till vibrationens rumsliga amplitud multiplicerad med friktionskoefficienten.

Om en kropp är att betrakta som i praktiken stel eller ej, är en fråga om tidsskalor. I de här behandlade situationerna finns flera, möjligen olika, tidsskalor. Långa tidsskalor, oftast många sekunder, rör de accelerationer en vagn utsätts för när den går genom en kurva. De accelerationsstötar vagnen utsätts för vid växelgenomgångar eller flänsstötar vid sinusgång har en avsevärt kortare varaktighet, oftast av storleksordningen $1/10$ sekund. Vibrationerna i vagnen är normalt sammansatta av ett antal enkla svängningar med olika varaktighet. Slutligen finns det en tidsskala inbyggd i lasten och dess delar. Dess elastiska egenskaper och dämpningen i den bestämmer lastens egen vibrationstidsskala.

Rent generellt kan vi säga att om kroppens egen tidsskala är mycket kortare än de tidsskalor som karakteriserar påverkan på den, då kan vi betrakta kroppen som stel. Omvänt, om kroppens tidsskala är mycket längre än påverkans, som exempelvis vid en mycket snabb stöt, kan kroppens uppförande aldrig beskrivas med stelkroppsmekanik, en mer ingående analys är då nödvändig.

En stel kropp förskjuts alltid om en sidförande accelerationsstöt är stor nog att övervinna friktionen. En verklig kropp förskjuts alltid mindre och, om tidsskalor och dämpning är lämpliga, inte alls. Närvaro av vibrationer kan i hög grad påverka verkliga kroppar om tidsskalan för vagnens vibration överensstämmer med lastdelens egen vibrationstidsskala. Sådana vibrationer kan förstärka förskjutningarna och leda till vandring i godset. En viktig aspekt, då vi behandlar snabba förlopp, är att dämpningen alltid är effektivare i högre frekvenser.

En lastdel som välter i stället för att glida då lastbäraren accelereras i sidled, måste normalt åtgärdas på något sätt. Det kan ske genom förstängning eller genom att flera lastdelar binds ihop så att de får större basyta.

För bedömning av vältningsrisker är det i allmänhet tillfyllest att betrakta kropparna som stela.

Gnidning uppkommer oftast då icke förstängbart gods först vandrar och därefter skaver mot det som stoppat godsets vandring. Både vandringen i sig (se ovan) och skavningen beror i hög grad på samspelet mellan vagnens vibrationer och godsets egenskaper. Störst risk för denna transportkomplikation föreligger, då godsets lägsta egenfrekvens i vertikal deformation ligger nära någon av vagnens egenfrekvenser med påtaglig vertikal komponent. En lodrät vibration minskar skenbart friktionen.

Den sistnämnda icke önskvärda händelsen, permanent deformation, är helt beroende av skillnader i de absoluta accelerationsnivåerna. De absoluta accelerationsnivåer gods utsätts för under transport utgör alltså dimensioneringsgrund för utformning av emballage i vid mening. Alla ovanstående överläggningar är relevanta i den mån de kollin som transporteras är adekvat emballerade (om det behövs). För att kunna avgöra utformningen av eventuellt emballage är toppnivåerna för accelerationer i olika riktningar nödvändig information.

SAMBANDET MELLAN ACCELERATION, TIDSVARIGHET OCH FÖRFLYTTNING

Om ett objekt utsätts för en kortvarig stöt som överstiger friktionskraften accelereras objektet och sätts i glidrörelse. Denna glidning fortsätter till dess att den ursprungliga rörelseenergin har förbrukats av friktionen mot underlaget.

I fallet gods på en lastbärare består stöten inte av en yttre kraft utan av godsets tröghet som gör att godset inte följer lastbärarens rörelse.

Vi antar för enkelhetens skull ett symmetriskt triangulärt accelerationsförlopp hos underlaget och konstant friktion (vilofriktion = glidfriktion) enligt Figur 9A. Underlaget får av någon yttre anledning en acceleration som från noll till A_{MAX} vid tiden T_1 och sedan åter minskar till noll vid tiden T_2 . Objektet följer med underlaget till dess att tröghetskraften överstiger friktionen då glidning uppkommer. Relativt underlaget uppkommer en acceleration (i motsatt riktning) som ökar till A_{MAX} minus friktionens påverkan och sedan åter minskar se Figur 9C.

När underlagets acceleration upphört har objektet en kvarstående relativ hastighet V_2 som sedan bromsas upp av friktionen till noll vid tiden T_s . Objektet har då rört sig sträckan S . Denna kan delas in i delsträckorna S_A och S_F där den förstnämnda syftar på sträckan under underlagets accelerationsförlopp och den senare avser förflyttningen under endast friktionens påverkan.

Accelerationssträckan S_A kan tecknas som tidsintegralen av hastigheten eller andraintegralen över tiden av accelerationen:

$$S_A = \int_0^{T_2} V \, dt = \int_0^{T_2} \int A \, dt \, dt$$

Godsets maximala acceleration:

$$A_{GMAX} = A_{MAX} - mg$$

Maxhastigheten V_1 blir då:

$$V_1 = \int A_G \, dt = \frac{A_{GMAX} T_2}{2}$$

och accelerationssträckan S_A :

$$S_A = \frac{A_{GMAX} T_2^2}{4}$$

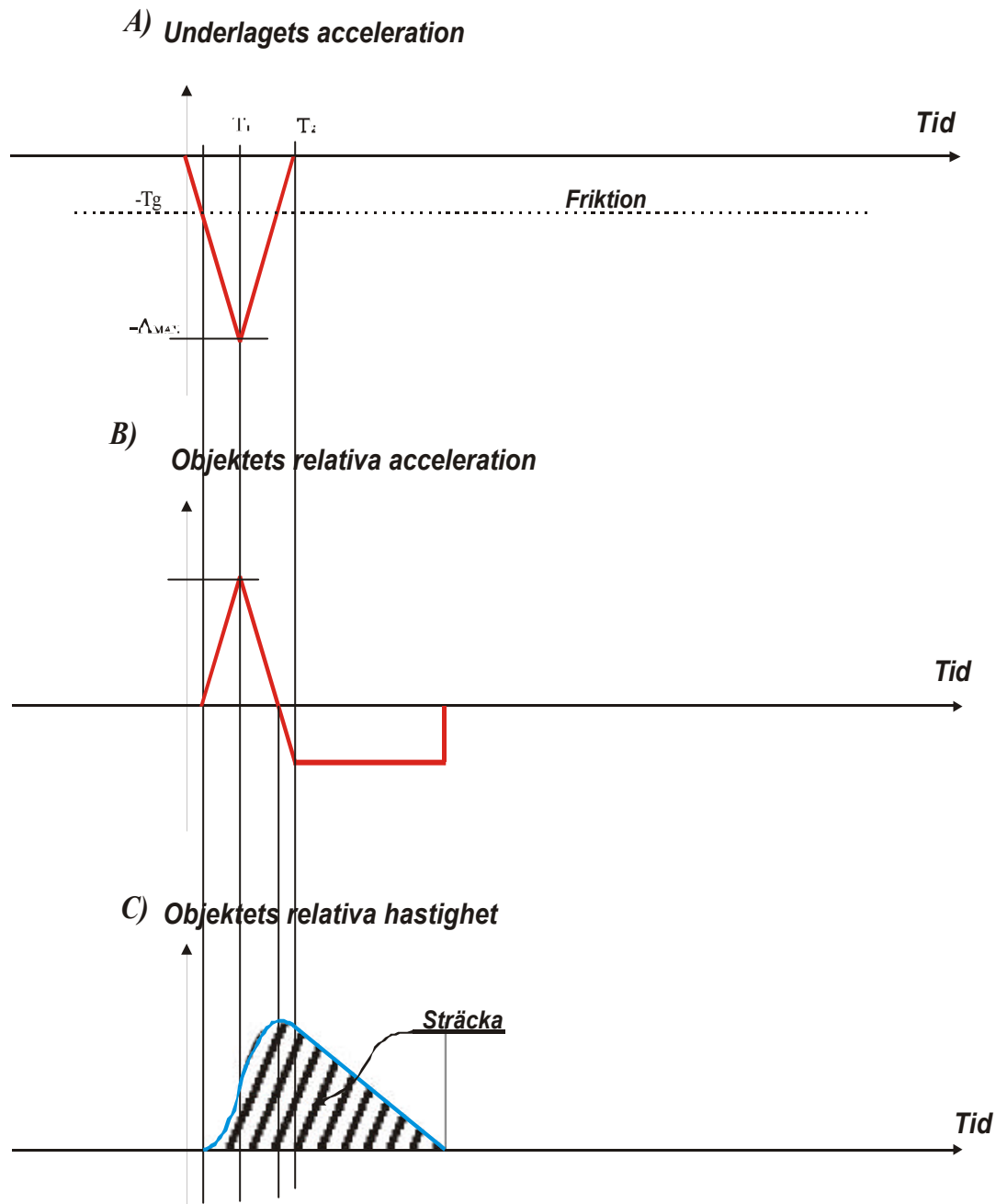
För den friktionskontrollerade uppbromsningen erhålls tiden:

$$T_2 = \frac{V_2}{mg}$$

Retardationssträckan S_F kan då tecknas:

$$S_F = \frac{V_2 T_2}{2} = \frac{A_{GMAX}^2 T_2^2}{4mg}$$

Snabba accelerationers inverkan på gods under transport

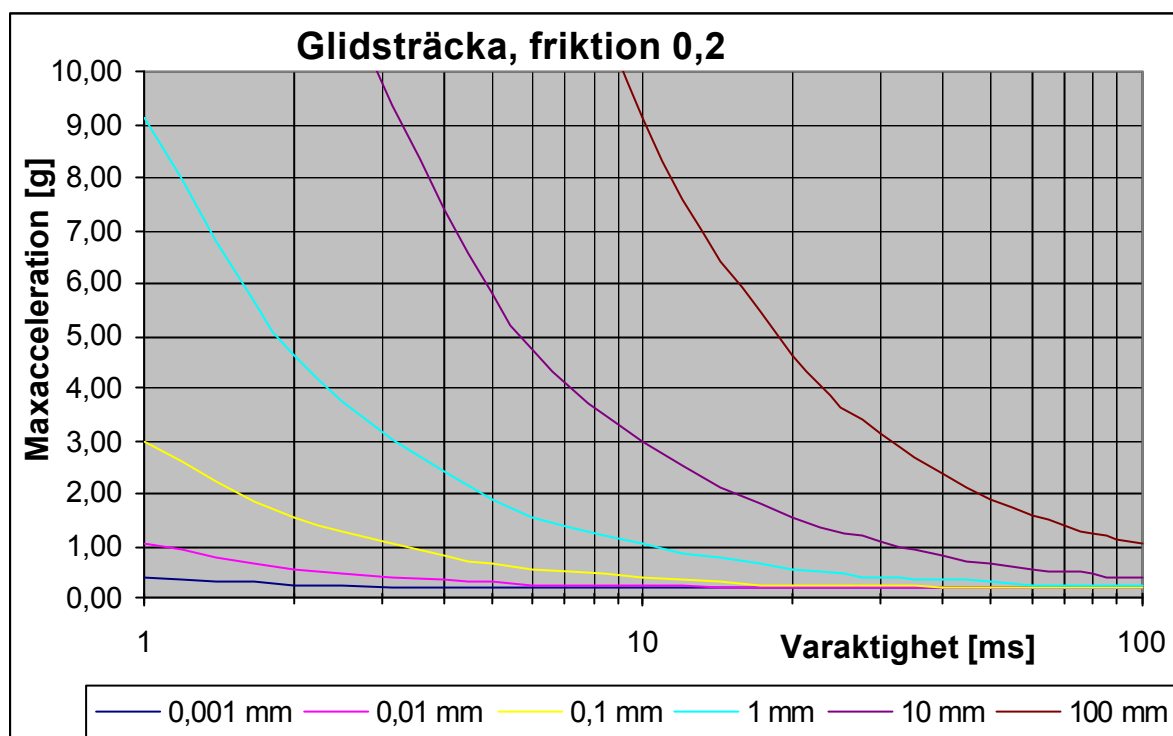


Figur 9 Acceleration, hastighet och glidsträcka vid förenklat stötförlopp.

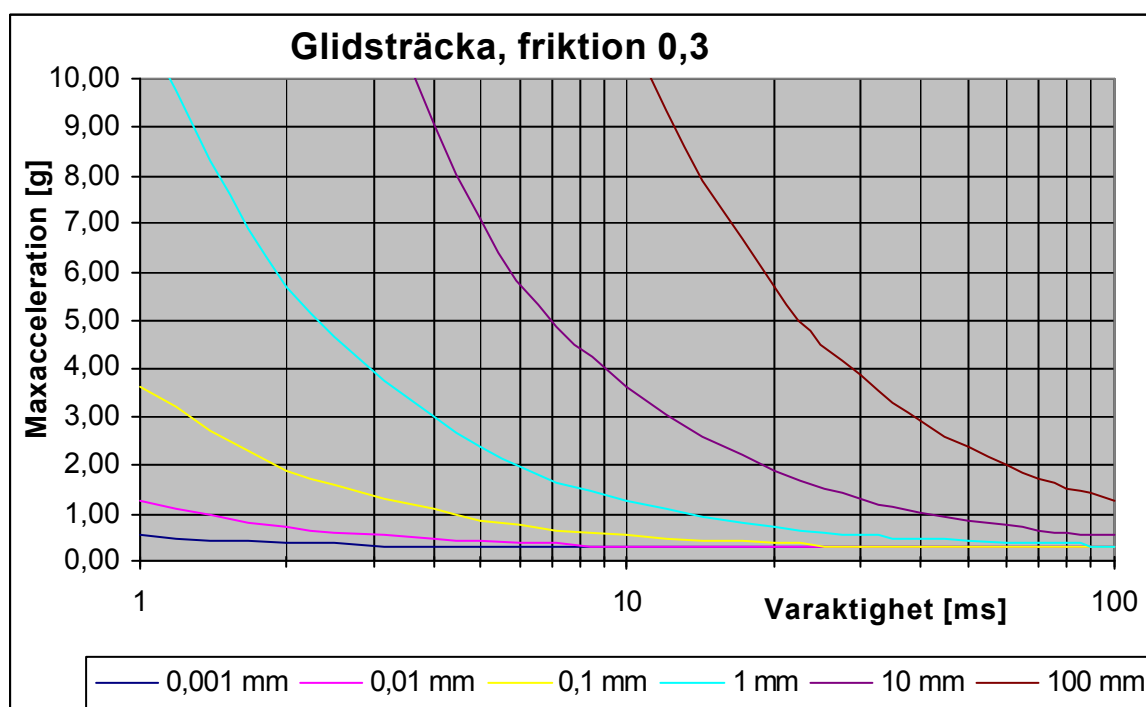
Insättning av $A_{\max}$ och summering av delsträckorna ger slutligen:

$$S = S_A + S_F = \left(A_{GMAX} + \frac{A_{GMAX}^2}{mg} \right) \frac{T_2^2}{4}$$

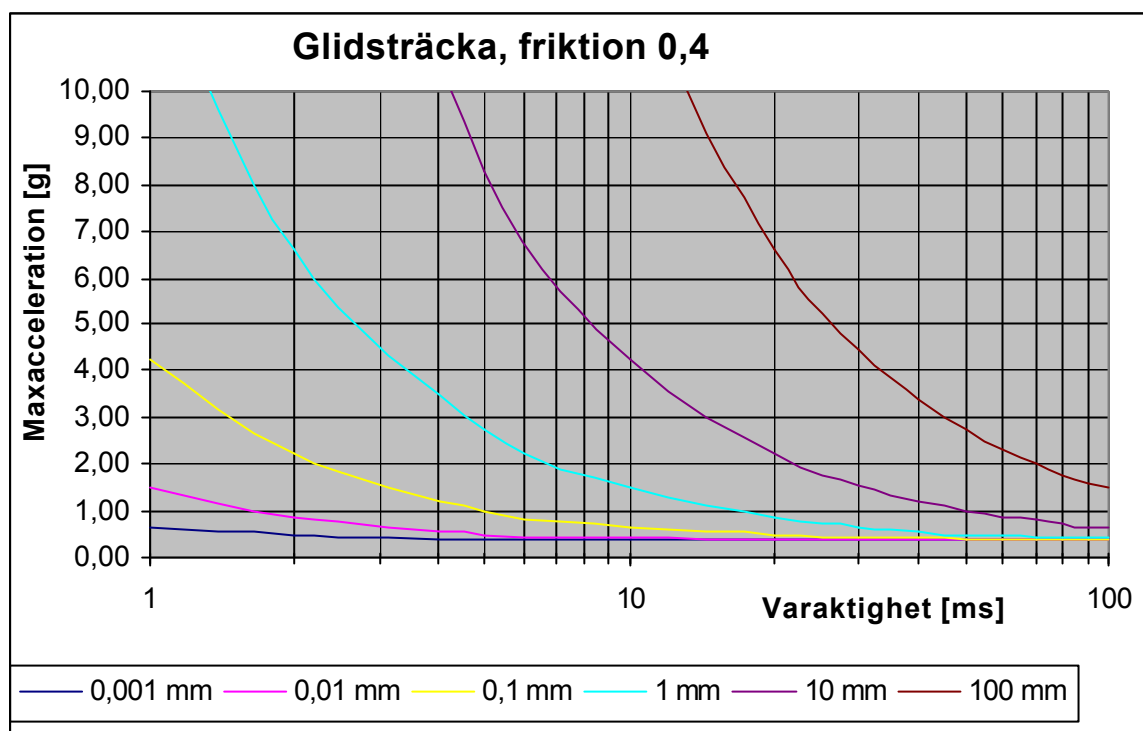
Glidsträckan beror av de tre variablerna Maxacceleration, Varaktighet och Friktion. På diagramform med given friktion ser resultatet ut enligt följande diagram i Figur 10 till Figur 16. Observera att förflyttningen kan bli avsevärt mindre exempelvis på grund av att godset inte är helt stelt eller att energin på annat sätt dämpas ut, se avsnittet *Gods på accelererande underlag*.



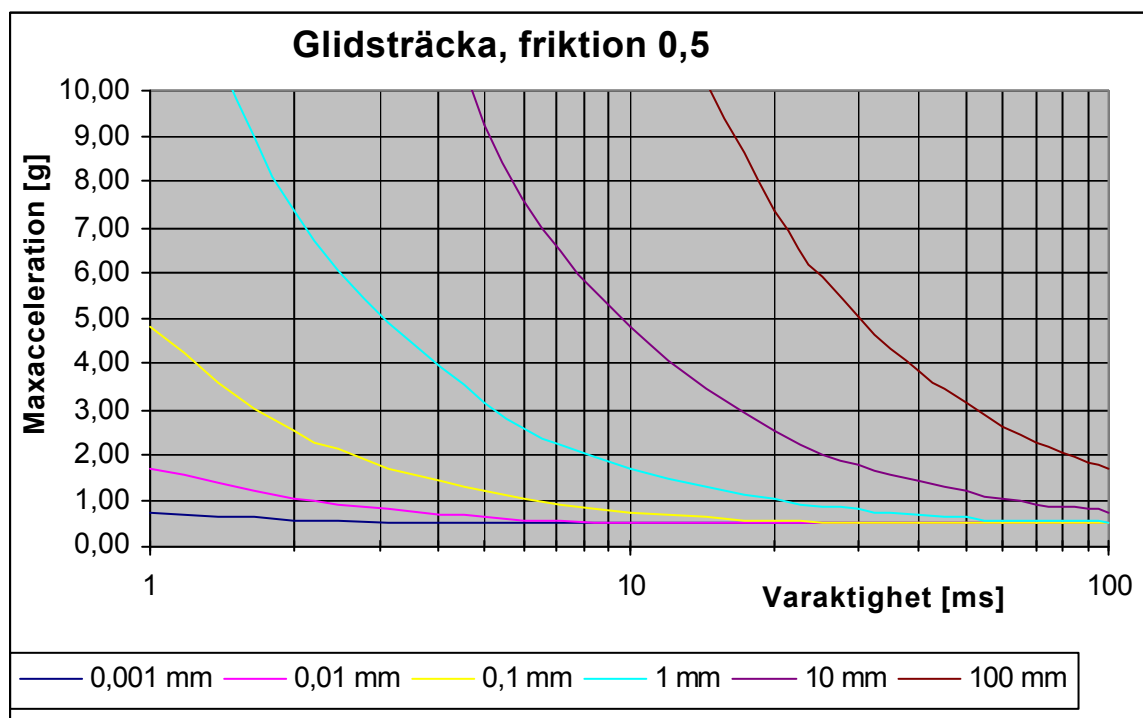
Figur 10 Glidsträcka på plant underlag vid horisontell stöt. Friktionskoefficient 0,2. För att godset skall rubba sig 1 mm fordras exempelvis en sidostöt på till 1 g under drygt 10 ms eller 4 g under drygt 2 ms.



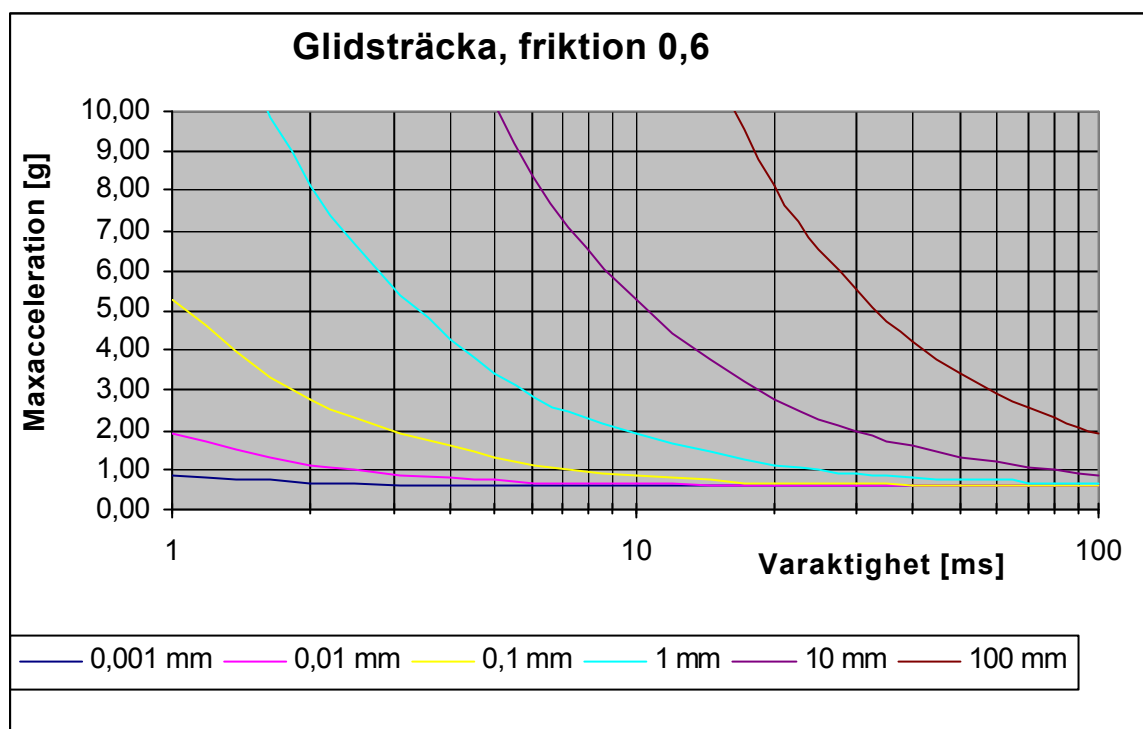
Figur 11 Glidsträcka på plant underlag vid horisontell stöt. Friktionskoefficient 0,3.



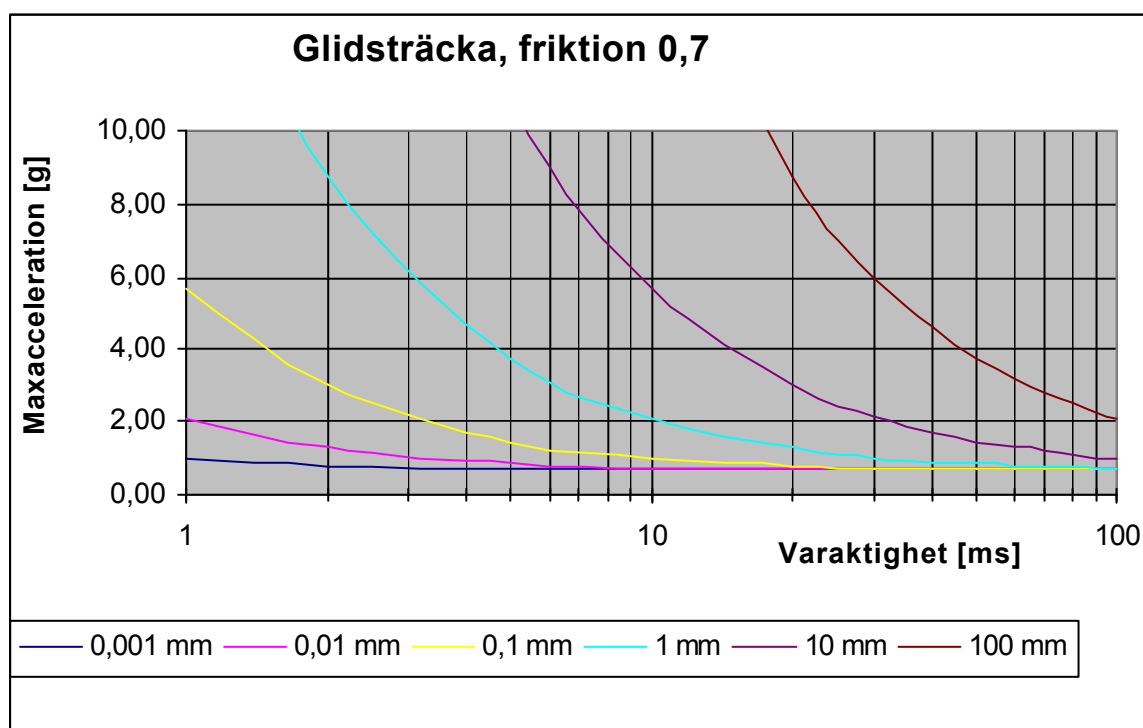
Figur 12 Glidsträcka på plant underlag vid horisontell stöt. Friktionskoefficient 0,4.



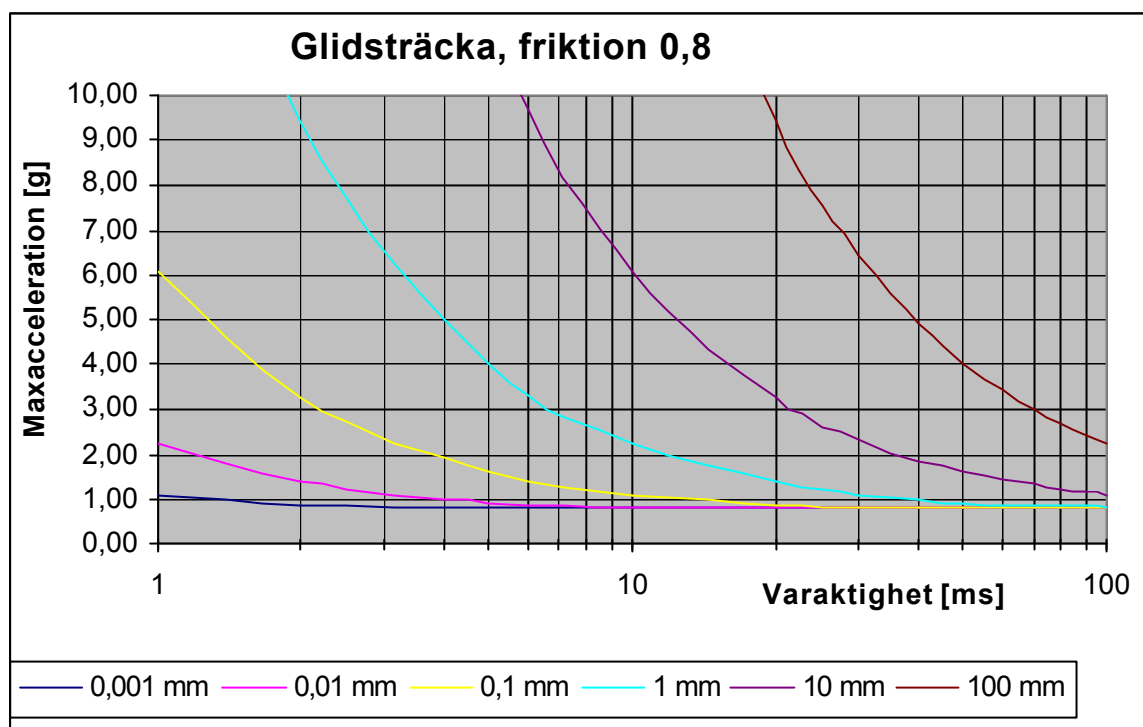
Figur 13 Glidsträcka på plant underlag vid horisontell stöt. Friktionskoefficient 0,5.



Figur 14 Glidsträcka på plant underlag vid horisontell stöt. Friktionskoefficient 0,6.



Figur 15 Glidsträcka på plant underlag vid horisontell stöt. Friktionskoefficient 0,7.



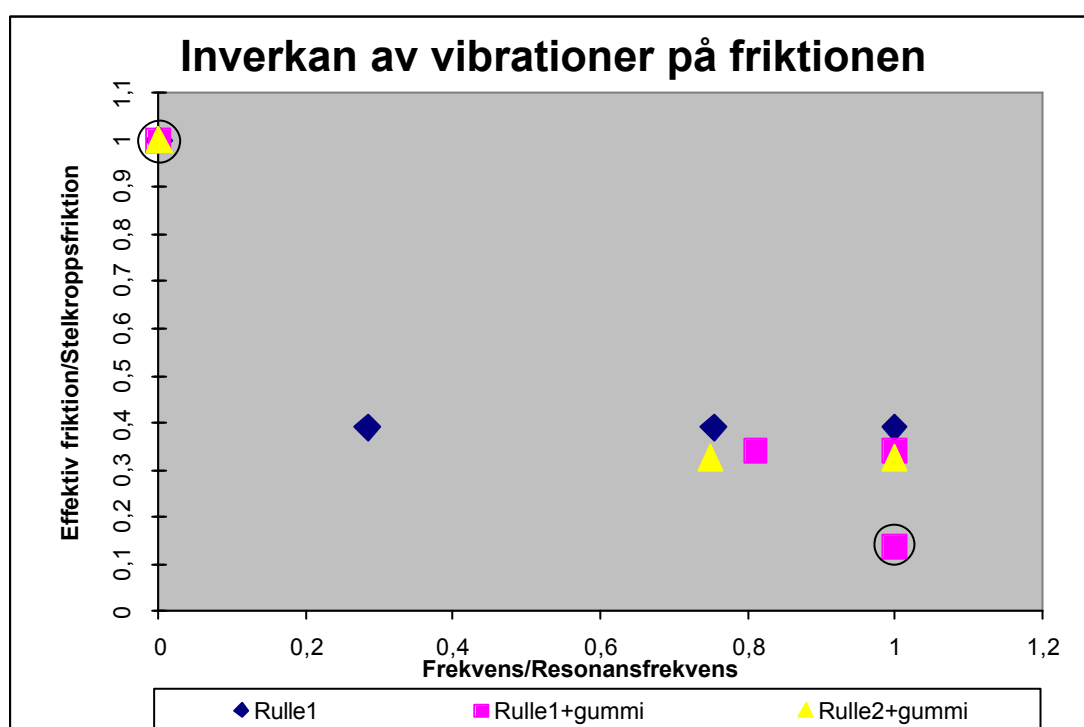
Figur 16 Glidsträcka på plant underlag vid horisontell stöt. Friktionskoefficient 0,8.

VERTIKALA VIBRATIONERS PÅVERKAN PÅ FRIKTIONEN

Vertikala vibrationer i underlaget kan leda till att vertikalkraften mellan gods och underlag reduceras i sådan omfattning att den effektiva friktionskraften minskar. Reduktionen är normalt av samma storlek som vibrationsamplituden men kan flerdubblas om vibrationsfrekvensen sammanfaller med en egensvängningsfrekvens i vertikalled hos godset.

AssiDomän har låtit genomföra prov med pappersrullar och vibrationsbord för att utröna sambandet mellan vertikala vibrationer och friktion. Proven visade att de aktuella pappersrullarna hade egenfrekvenser i området 40 - 60 Hz, ett område som kan befaras bli exciterat av till exempel syllfrekvensen. Huvuddelen av rullen betedde sig som en stel kropp men gaveln fjädrade elastiskt.

När friktionen testades på ett skakbord kunde man visa att den effektiva friktionen sänktes drastiskt vid frekvenser nära resonansfrekvensen jämfört med om objektet hade uppfört sig som en stel kropp.



Figur 17 Diagrammet visar hur den effektiva friktionen kan sjunka drastiskt då underlaget vibrerar nära godsets egenfrekvens. Försöket är genomfört så att en konstant sidkraft anbringats på en rulle varefter frekvensen ökats till dess rullen börjat glida. Diagrammet visar att den effektiva friktionen kan sjunka till ca 15 % av den ursprungliga vilofriktionen. (Assi Domän, 2000)

Rent praktiskt medför den minskade effektiva friktionen runt rullarnas resonansfrekvens att en rulle med vilofriktionen $\mu=0,3$ i försöket började röra sig i sidled då en sidkraft motsvarande 0,14 g i sida anbringades.

Problemet kan lösas genom att dämpa bort excitationen i de aktuella frekvensområdena. Prov med ett lager gummi under golvet har gett god effekt vid verkliga transporter.

UTVÄRDERING AV MÄTNING

Bakgrund

Mycket gods transporteras i dag i transportkedjor på lastbärare med olika transportmedel som bil, järnväg och båt. För bil- och fartygstransporter existerar lastsäkringsnormer uttryckta i så kallade dimensionerande accelerationer. För godstransport på järnväg saknas f. n. normer, men transportörerna tillämpar vissa riktlinjer för lastsäkring, oftast uttryckta i termer av en dimensionerande acceleration.

Den dimensionerande accelerationen mäts inte vid normsättning⁵ (jfr avsnittet *Accelerationsnivåer och mätningar av dessa*). Den uppskattas i stället ur fordonets/farkostens och lastens förväntade stelkroppsrörelser under förekommande förlopp (kurvtagning, kollisioner, sjögång etc.). För att lasten ej skall förskjutas i förhållande till lastbäraren, fordras att lastsäkringsutrustningen förmår hålla ihop last och bärare, d. v. s. ge lasten samma acceleration som bäraren. Den dimensionerande accelerationen används så att säkringen skall kunna kvarhålla hela eller varje separat säkrad del av lasten *betraktad som en stel kropp* när lastbäraren utsätts för *konstant acceleration*.

Teoretiskt sett förutsätter ovanstående resonemang att även lastsäkringsutrustningen är stel, d. v. s. odeformerbar. Normerna kompletteras därför i regel med tillämpningsexempel. Vissa typer av lastsäkringsutrustning, som deformerar ”mycket lite” vid dimensionerande last, betraktas som stela (t.ex. förstängningar). På annan säkringsutrustning som är mer eftergivlig, exempelvis surmingsband, ställs i tillämpningsföreskrifter krav på förspänning.

Uppskattade stelkroppsaccelerationer i järnvägsvagnar, motsvarande dimensionerande accelerationer för bil och båt, anses ej vara dimensionerande, då gången i en järnvägsvagn understundom är knykig, d. v. s. accelerationen innehåller höga kortvariga toppar (jämför avsnittet *Påkänningar på järnvägsvagnar*). Då det är oklart hur dessa lokalt på vagnen uppmätta toppar egentligen påverkar lasten, föreslås att uppmätta signaler skall lågpasfilteras⁶ för erhållande av de dimensionerande accelerationerna. Karaktären på detta lågpasfilter har då bestämts så att nivåerna i stort överensstämmer med redan tillämpade riktlinjer, i sin tur baserade på erfarenhet inom transportsektorn.

Normer eller praxis baserad på dimensionerande accelerationer uttrycker (minimala) säkerhetskrav och är endast en del av problematiken. Dels finns problematiken med resonans vid godsets egenfrekvens som kan orsaka vandring och dels finns en problematik runt korta snabba accelerationer. Korta snabba accelerationer kan exempelvis tänkas utgöra ett problem vid transport av bräckligt, sprött gods. Även karaktären på lastbärarens rörelse kan ha avgörande inflytande på godset påverkan. Gods som utsätts för vibrationer kan vandra på lastbäraren och gnidas mot andra godsdelar (och därvid även bli säkerhetsproblem). Emballage kan krypdeformeras under ett långvarigt vibrationsförlopp. En snabb stöt kan knäcka sprött gods. Speciellt vid järnvägstransporter uppstår då frågan, hur de uppmätta lokala snabba accelerationerna påverkar lasten. Kan den förskjutas eller skadas?

Mätningar med accelerometrar på järnvägsvagnar har genomförts tidigare och befunnits innehålla höga transienta toppar. Då varje accelerometer endast mäter accelerationen i sin fästpunkt uppstår dock alltid tolkningsproblem. Vad är vagnens, betraktad som stel kropp, acceleration? Hur kan lasten påverkas av uppmätta vibrationsförlopp?

⁵ Normer för dimensionerande accelerationer vid lastsäkring.

⁶ I detta fall ett filter som tar bort de svängningar som inte har reell påverkan på godset med avseende på lastsäkring.

Snabba accelerationers inverkan på gods under transport

Accelerationsmätningar på järnvägsvagnar under gång ger vid handen att förhållandevis höga accelerationsnivåer lätt kan uppkomma lokalt. Eftersom lastsäkringsnormer och –riktlinjer oftast är baserade på accelerationsuppgifter, uppstår ett lastsäkringsproblem. Hur skall den dimensionerande accelerationen bestämmas och är, i så fall, ett sådant mått tillräckligt?

Föreliggande studie avser att

- undersöka den reella accelerationsbilden i järnvägsvagnar
- belysa snabba accelerationers inverkan på gods
- utarbeta en metod att uppskatta järnvägsvagnens tyngdpunktsacceleration ur mätningar på vagnen.

Försökens genomförande

Accelerationer har mätts på flera ställen på såväl lastade som olastade vagnar under gång. För att underlätta tolkningen har vagnar också manuellt exciterats på olika ställen, se *Accelerationsmätningar*

Energien i denna manuella excitation kan uppskattas, och man får därmed en direkt uppskattning av energiinnehåll och –dissipation i de dominerande moderna. Åtta accelerometrar utplacerade på skilda ställen i vagnen ger ett underlag för uppskattningar av modernas geometriska form.

Analys av resultaten från ”ping”-proven, d.v.s. de kontrollerade excitationerna, påvisar existensen av tydliga moder för svängningar i vertikal led. De två dominerande av dessa, med egenfrekvenser i en specifik vagn på 23 Hz och 33 Hz, är relativt svagt dämpade med mycket små modmassor. Dessa bägge moder ansvarar för större delen av energin i området över 10 Hz.

Det har ej varit möjligt att på ett övertygande sätt fördela energin mellan dessa bägge moder, varför uppskattningar rörande effekter på tyngdpunktens rörelse hela tiden gjorts med utgångspunkt i värsta tänkbara utfall. Även sådana mycket konservativa uppskattningar ger dock vid handen att tyngdpunktsaccelerationen, vid vertikala svängningar över 10 Hz, är mindre än 5 % av den uppmätta accelerationen i detta frekvensregister. I praktiken innebär detta att för accelerationer som mäts och som har en frekvens över 10 Hz kan amplituden delas med 20 varefter de reella accelerationsnivåerna i tyngdpunkten bör erhållas. Dessa analyser är en del av basen som ligger till grund för den filtrering som sedan genomförs på uppmätta accelerationsnivåer, se *Filtrering av mätsignaler*.

Horisontella accelerationer uppvisar en betydligt mer komplex modbild, där dock samtliga moder är kraftigt dämpade och har mycket låga modmassor.

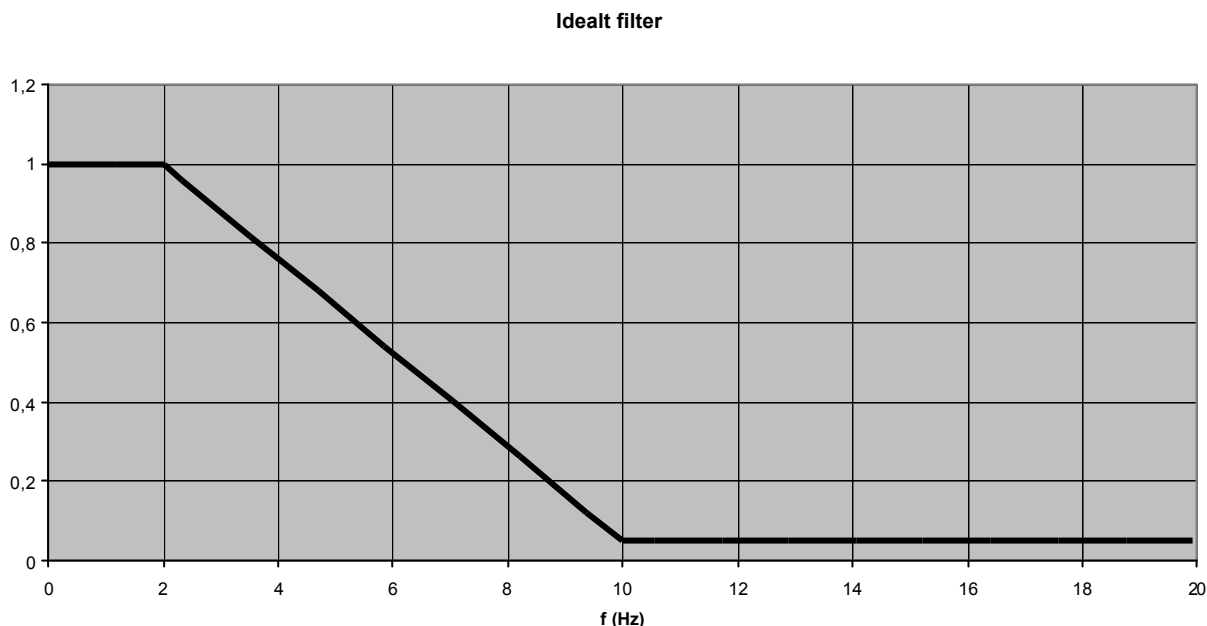
Filtrering av mätsignaler

Accelerometrar på vagnen och på godset registrerar avsevärt större lokala rörelser än vad vagnen som helhet (vagnens tyngdpunkt) utsätts för. De registrerade signalerna behöver filtreras för att vagnens totala accelerationer skall framträda. Bakgrunden till de avsevärt högre nivåerna, i enskilda vagn- och godsdelar som uppmäts, ges i avsnitten Dynamik och accelerationer och Accelerationsnivåer och mätningar av dessa. Hur nivåer på interna svängningar etc. i relation till tyngdpunktsrörelserna identifieras ges främst i Appendix ”Teori och arbetsgång vid ”pingning” av vagnen”

I området 0 till 10 Hz sker en gradvis förstärkning av vagnens tyngdpunktssvängningar från ingen förstärkning alls vid en konstant acceleration (0 Hz) till ca 20 gångers förstärkning vid 10 Hz. För frekvenser över ca 10 Hz fås, konservativt bedömt, interna svängningar på ca 20

Snabba accelerationers inverkan på gods under transport

gånger vagnens tyngdpunktsaccelerationer. Detta ger att uppmätta amplituder för frekvenser över 10 Hz skall reduceras till 5 % av uppmätt amplitud.



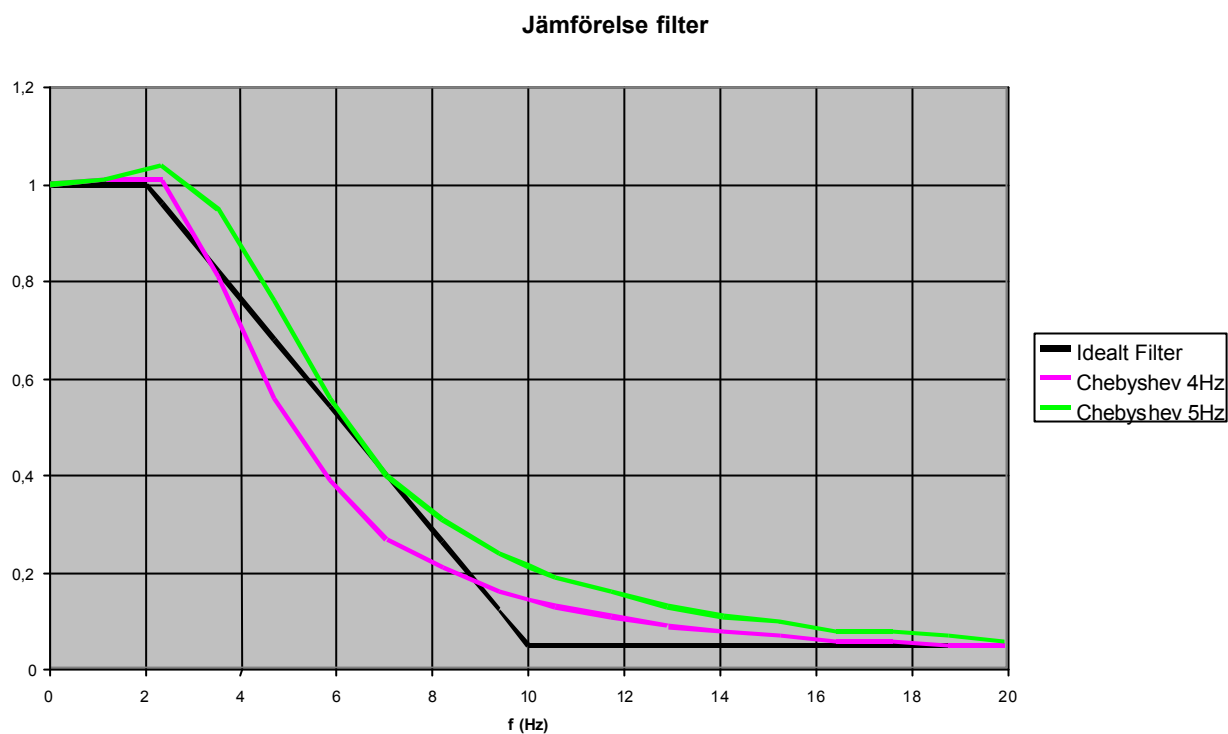
Figur 18 Diagrammet visar hur stor del av den uppmätta signalen som kan hänföras till reella tyngdpunktsaccelerationer för respektive frekvensområde.

Det finns en risk att en uppmätt acceleration motsvarar den accelerationsnivå som tyngdpunkten svänger med. Skalas denna ner med filtret kommer amplituden för denna att underskattas. Sannolikheten är dock mycket stor att denna ”reella” acceleration ger upphov till en kopplad resonansfrekvens som i sin tur ger upphov till en lokal svängning som är avsevärt större än den reella amplituden. Denna ”överamplitud” kommer då med största sannolikhet att fångas upp av någon accelerometer förutsatt att man inte har mycket stor otur i placering av dessa.

Programmet DasyLab som används för utvärdering av mätningen innehåller ett antal fördefinierade filter med olika karakteristik. Det filter som bäst överensstämmer med det teoretiskt ideala, såsom det beskrivs i avsnittet Filtrering av mätsignaler, är lågpassfilter, ett så kallat Chebyshev-filter av ordning 0,5. Figur 19 visar hur det valda filtret överensstämmer med det önskade. Vid utvärderingen användes ett filter med ut-off-frekvensen⁷ 5 Hz. Detta ger en överskattning av amplituderna speciellt i området runt 10 Hz. Över 30 Hz ger det fördefinierade filtret en något för stor dämpning jämfört med det teoretisk ideala men vid så höga frekvenser bedöms det vara utan praktisk betydelse.

⁷ Definierad som den frekvens där filtret dämpar 3 dB.

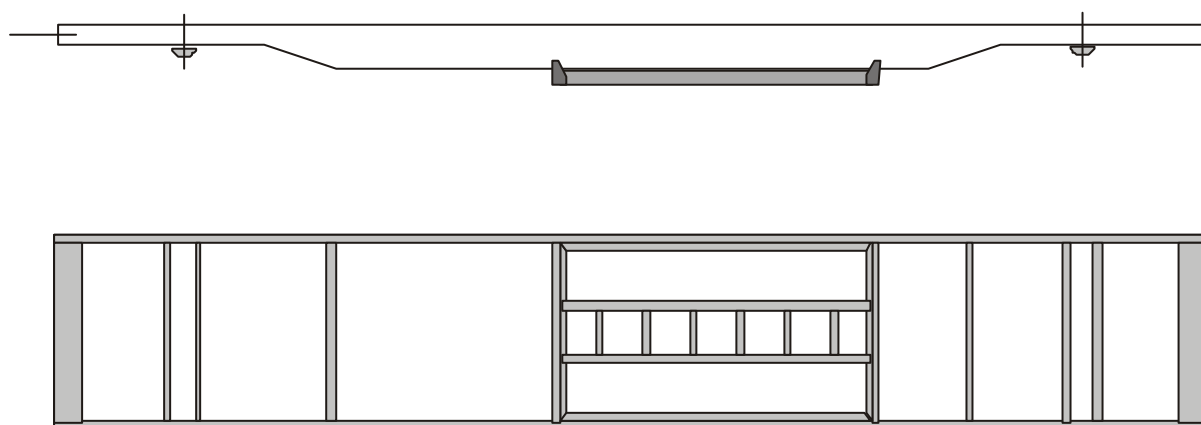
Snabba accelerationers inverkan på gods under transport



Figur 19 Jämförelse mellan idealt filter och fördefinierade filter i programmet DasyLab.

Mätningen

Mätningar av accelerationer har utförts på en järnvägsvagn i kombitrafik mellan Göteborg och Sundsvall under april 2000. Mätobjektet var en öppen kombivagn med beteckningen Sgms.



Figur 20 Skiss över strukturen på den järnvägsvagnen som använts vid accelerationsmätningarna.



Figur 21 Foton på vagnen som accelerationsmätningarna utförts på.

Vagnen är avsedd för transport av containers och semitrailers. Korgen består av ett öppet ramverk med en "balja" för semitrailerns boggie och en flyttbar vändskiva för trailerns king-pin. Knaster för containers sitter på gångjärnsfästen och kan svängas undan då de inte används.

Vagnen har mycket liten egen dämpning i ramverket och ett antal lösa delar som kan komma i svängning och ge upphov till lokalt slammer.

Mätutrustning

Mätutrustningen består av 8 st. kapacitiva accelerometrar kopplade till en datalogger, Wavebook/512, via en kopplingsbox för accelerometrarnas strömförsörjning. Dataloggern registrerar alla 8 kanalerna parallellt och konverterar signalerna till en seriell signal som går vidare till en vanlig bärbar pc. Accelerometersignalen samplades med 300 Hz.

Samtidigt med accelerationsmätningen sker registrering av vagnens position med en GPS-mottagare kopplad till datorns COM-port.

Både accelerometersignalerna och GPS-signalen hanteras i datorn med programmet DasyLab. Mätdata lagras direkt på datorns hårddisk och kopieras manuellt till Zip-diskett eller CD-R vid varje mättnings slut.

Strömförsörjningen till mätutrustningen kommer från ett 12V:s bilbatteri med ca 75 Ah kapacitet.

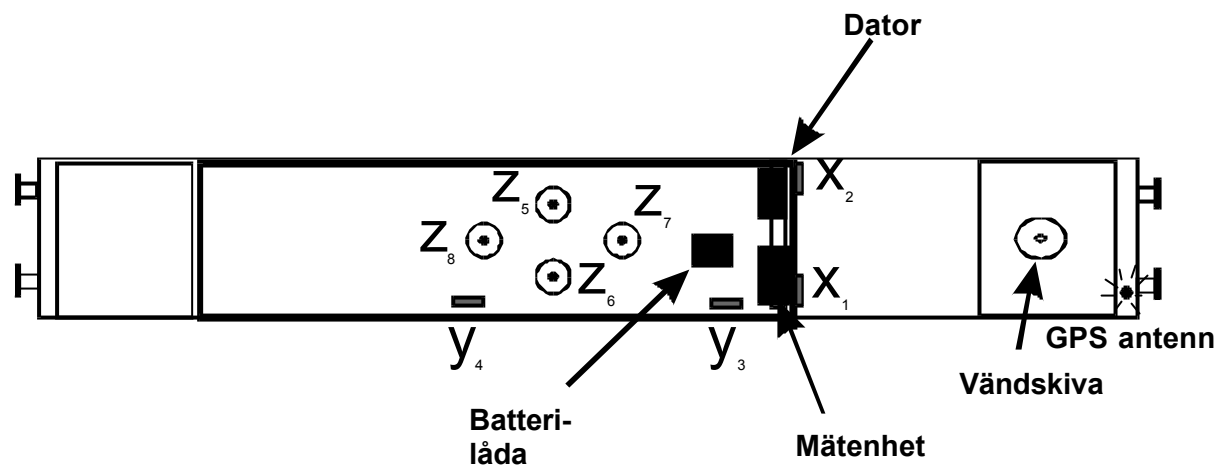
Snabba accelerationers inverkan på gods under transport

Genomförda prov

Fyra prov genomfördes i den första provserien:

- | | |
|--------|--|
| Prov 1 | Kombiterminalerna Göteborg-Sundsvall med tom vagn. |
| Prov 2 | Sundsvall-Göteborg lastad med container (40', 23 ton). |

I båda dessa skedde mätning endast på vagnen enligt arrangemang i Figur 22.

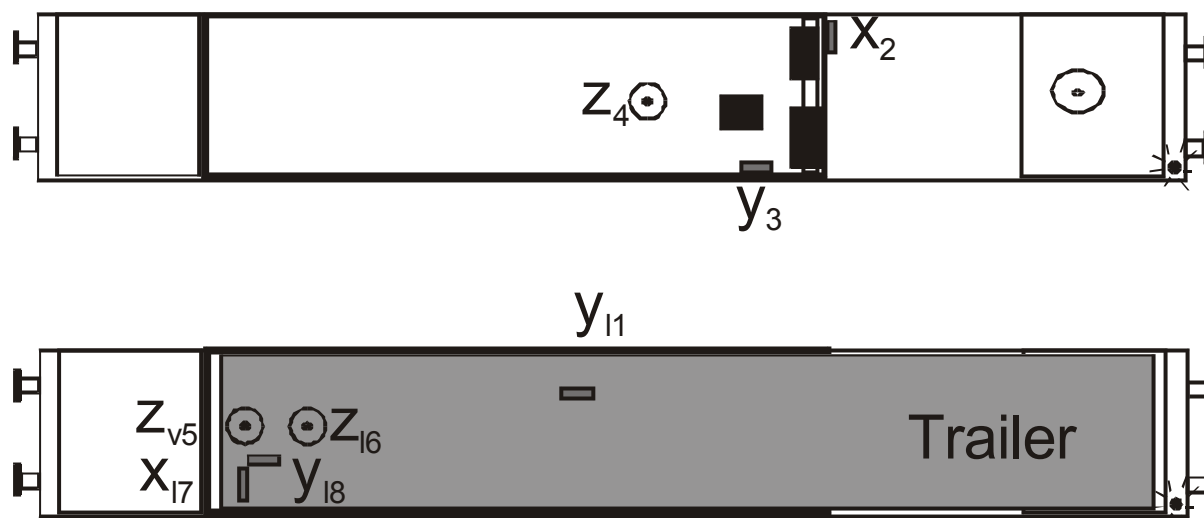


Figur 22 Accelerometrarnas placering vid prov 1 och 2.

- | | |
|--------|---|
| Prov 3 | Göteborg-Sundsvall med last av en trailer, vikt 25 ton. |
| Prov 4 | Sundsvall-Göteborg med last av trailer, vikt 30 ton. |

Både prov 3 och 4 kördes med några accelerometrar placerade på trailer och på last i trailer och några placerade på vagnen, se Figur 23.

Snabba accelerationers inverkan på gods under transport



- y1= Tvärsacc på lastpall lager 2
- x2= Längsacc. vagn
- y3= Tvärsacc. vagn
- z4= Vertikalacc. vagn
- zv5= Vertikalacc på trailergolv
- zl6= Vertikalacc på topp av last
- xl7= Längsacc. på lastpall
- y18= Tvärsacc på lastpall

Figur 23 Accelerometrarnas placering vid prov 3 och 4.

Under prov 3 uppstod fel i strömförsörjningen till mätutrustningen efter ca 1 timmes körning och den resterande resan registrerades inte. I övrigt erhöles kompletta mätresultat från körningarna.

Resultat

Några av resultaten från mätningarna presenteras här. Proven beskrivs mer utförligt i Appendix "Accelerationsmätningar".

Accelerationsnivåer:

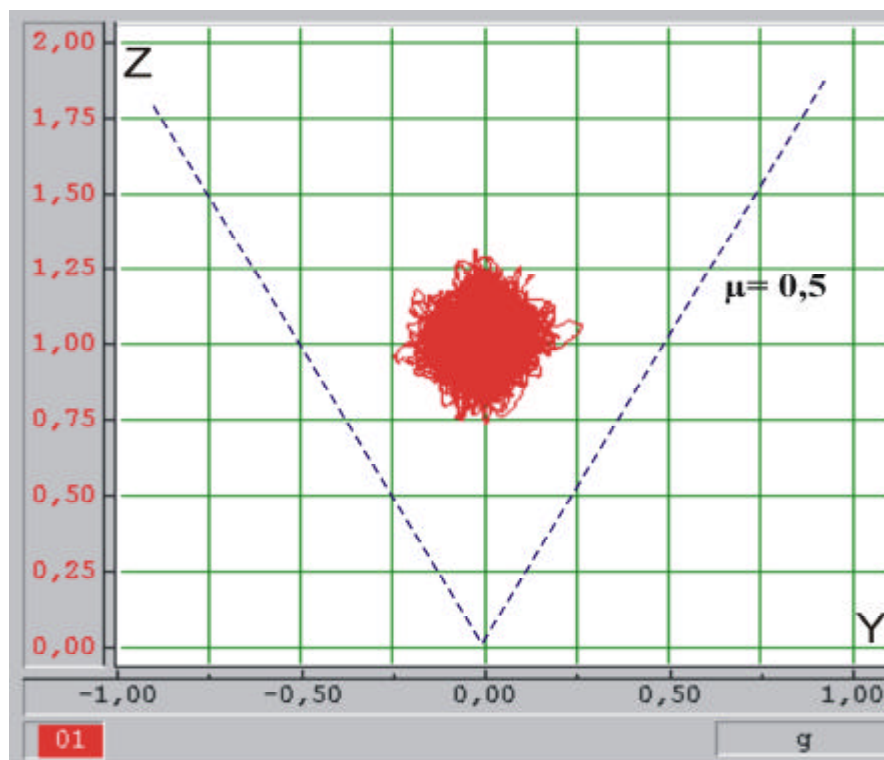
Max accelerationer i jämvägsvagn vagn [g] Anpassat filter

	Tom vagn	Lastad vagn med container	Lastad vagn med trailer (end. vagn)
Longitudinellt	0,77	0,37	0,42
Transversellt	0,97	0,29	0,41
Vertikalt	0,42	0,43	0,34

Med tom vagn uppstod enstaka höga horisontella accelerationer vid växling och rangering. Motsvarande förekom inte under proven med lastad vagn. Accelerationerna i trailern behandlas i ett följande avsnitt.

Samtidighet i accelerationerna

Samtidigheten i vertikala och horisontella accelerationer studerades genom att de filterade accelerationssignalerna plottades två och två för hela provet såsom visas i nedanstående figur. Resultaten visar att höga accelerationer i vertikal och horisontell riktning knappast sammanfaller. Mätningarna med last uppvisar en i stort sett rombisk fördelning av accelerationerna. I diagrammet visas vertikalaccelerationen som medelvärde av fyra accelerometrar.



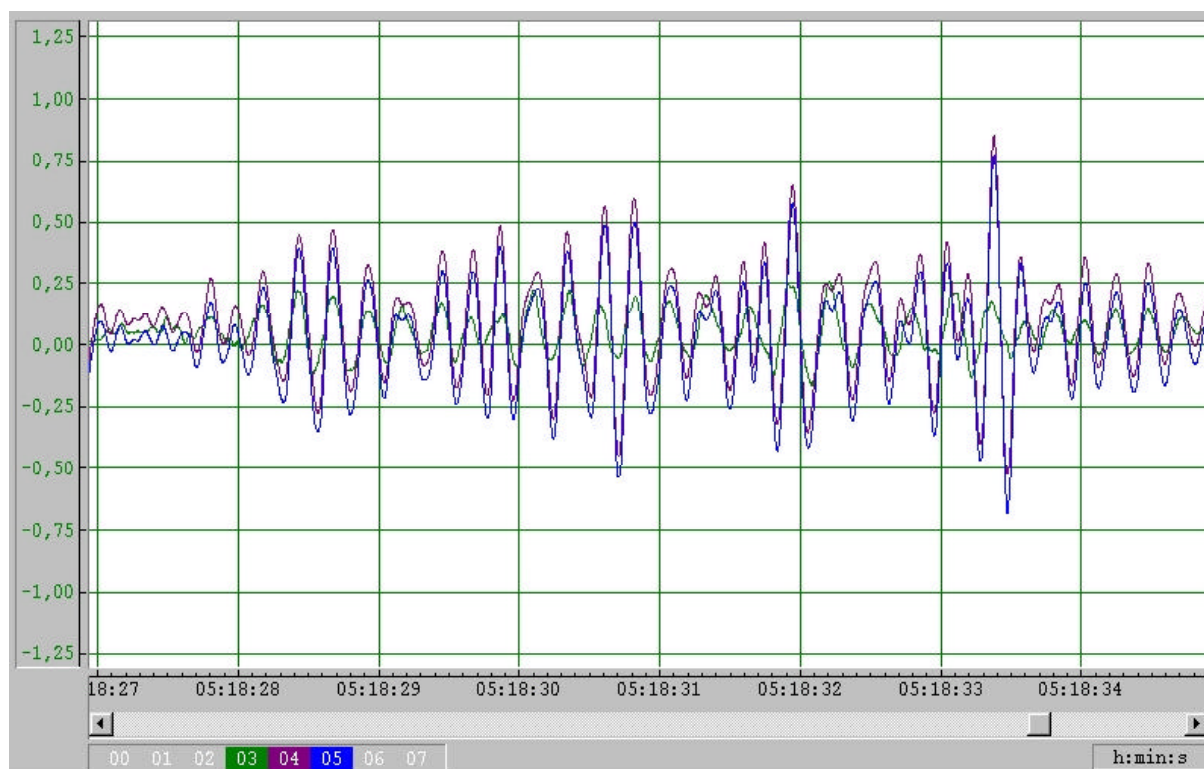
Figur 24 Samtidighet i accelerationer vertikalt och i sidled. Prov 2, lastad vagn.

Den ”pingning”⁸ som gjordes av vagnen före första provet registrerades dåligt. Det bedömdes också att ytterligare ”pingningar” var av värde för att kunna skilja ut lokala accelerationer från vagnens stelkroppsrörelse. Därför gjordes ytterligare en mätomgång på en stillastående vagn. Accelerometrarna flyttades runt mellan olika positioner på vagnen och svängningar exciterades med slag på olika ställen av vagnen.

⁸ Se bland annat Accelerationsmätningar

Lågfrekvent resonans i trailer

Vi mätningarna på trailern har ett fenomen av resonanssvängningar visats. Se fig.



Figur 25 Vertikala egensvängningar i trailer på järnvägsvagn. Kanaler: 3; vertikalt på järnvägsvagn, 4 & 5; vertikalt i trailer.

Dessa uppkommer genom att trailerns fjädringssystem har samma egensvängningsfrekvens som järnvägsvagnen. Under denna svängning visar sig transversella accelerationerna vara små. Egensvängningsfrekvensen ligger vid ca 5 Hz och vid en hastighet om 110 km/tim. Motsvarande egensvängningar kan även uppkomma på väg vid sträckor med vägsador som ger upphov till samma påverkan på trailern. Fenomenet betraktas inte som allvarligare vid transport på järnväg än vid transport på väg.

Egensvängningen beror till stor del på trailerns egenskaper och är relativt lätt att eliminera. Ett sätt är att säkra eller vertikalt stötta trailer som har en aktiv fjädring. Detta är emellertid en extra hantering. Det bästa är att fjädringssystemet på trailern inte över huvud taget är aktiverad. Exempelvis transporteras alla luftfjädrade trailer med en evakuerad fjädring.

Den trailer som mätningarna gjordes på var av äldre typ med tre axlar och bladfjädrar. Se Figur 26



Figur 26 Trailer använd vid accelerationsmätning.

Accelerationerna uppmätta på den aktuella trailern visar följande karaktär enligt Tabell 4.

Tabell 4 Karaktären av filtrerad acceleration i trailer under transport på järnvägsvagn.

Acceleration	$a_{\text{vertikalt}}$	$a_{\text{longitudinellt}}$	$a_{\text{transversellt}}$
g	0,77	0,15	0,33

Karaktären på accelerationer inne i trailern jämfört med vagnen visar att den vertikala amplituden förstärks vid låga frekvenser men sjunker kraftigt vid högre frekvenser genom fjäderingens inverkan. Trailern har framförallt mindre högfrekventa accelerationer.

FORTSATTA STUDIER

Det finns ett antal frågeställningar som besvarats och genomlysts i föreliggande studie. Ett filter för att tolka uppmätta accelerationer i järnvägsvagnar har konstruerats baserat på mekaniskt resonemang och med resultat från så kallade *pingprov* där vagnens interna egenskaper filtreras bort från mätresultaten. Därmed kan de accelerationsnivåer som uppkommer i vagnens tyngdpunkt uppskattas. Tyngdpunktsaccelerationerna kan i sin tur ses som underlag för framtagande av de accelerationsnivåer mot vilka dimensioneringskriterier av lastsäkring byggs. Detta arbete har utförts dels praktiskt genom mätningar och tolkningar av mätningar men även till stor del genom teoretiska djupdykningar inom ämnet.

Nästa steg är att fortsätta verifieringen av de resultat som framkommit i studien. Ett antal olika delområden bör vara aktuella för vidare studier:

- Verifiering av de mätvärden som uppmätts och att dessa även gäller för andra vagn typer än den som mätningarna utförts på. Även resonanser för andra vagn typer bör bestämmas
- Mätningar i andra och fler mätpunkter på vagn och gods för att verifiera att ett större statistiskt material ger överensstämmande accelerationsnivåer
- Verifiering att det filter som konstruerats i projektet stämmer med verkligheten i upprepade försök. Detta bör ske både genom vidare teoretiskt arbete och genom praktiska försök. Praktiska försök exempelvis genom samtidig mätning av accelerationsnivåer och praktisk verifiering av krafter på godset i vagnen under transport
- Mer avancerade analyser bör utföras så som impedansanalyser där en transducer samtidigt med mätningarna ger definierade och varierbara insignaler. Impedansanalyser bör också utföras vilket i sin tur kan ge överföringsfunktioner mellan olika punkter i vagnen. Lämpliga mätpunkter bör lokaliseras. Samtidigt bör mindre lämpliga mätpunkter identifieras
- Samma sorts mätningar som utförts på järnvägsvagnar kan utföras på trailer i landsvägstransport. Detta för att få ut specifikt på vilka områden landsvägs och järnvägstransporter skiljer sig med avseende på accelerationer på lasten
- Analys och uppmätning av egenfrekvenser och egendämpning hos andra godstyper än pappersrullar, exempelvis långgoods.

APPENDIX

- I. Accelerationsmätningar
- II. Frekvensspektra
- III. Teori och arbetsgång vid ”pingning” av vagnen
- IV. Ett accelerationssökande system
- V. Mekaniska vibrationer
- VI. Plott av positionssignal
- VII. Identifierade banavsnitt med höga accelerationer

Accelerationsmätningar

Prov 1

MÄTNINGENS BETECKNING: PROV1

MÄTSTRÄCKA: Göteborg-Sundsvall

MÄTOBJEKT: Vagn 1: S-vagn utan last

START: 2000-04-25 kl 17:10

STOPP: 2000-04-26 kl 07:54

TOTALT: 14:44 h

UTRUSTNING:

MiTAC 5033 , laptop

DASY Lab+, programvara

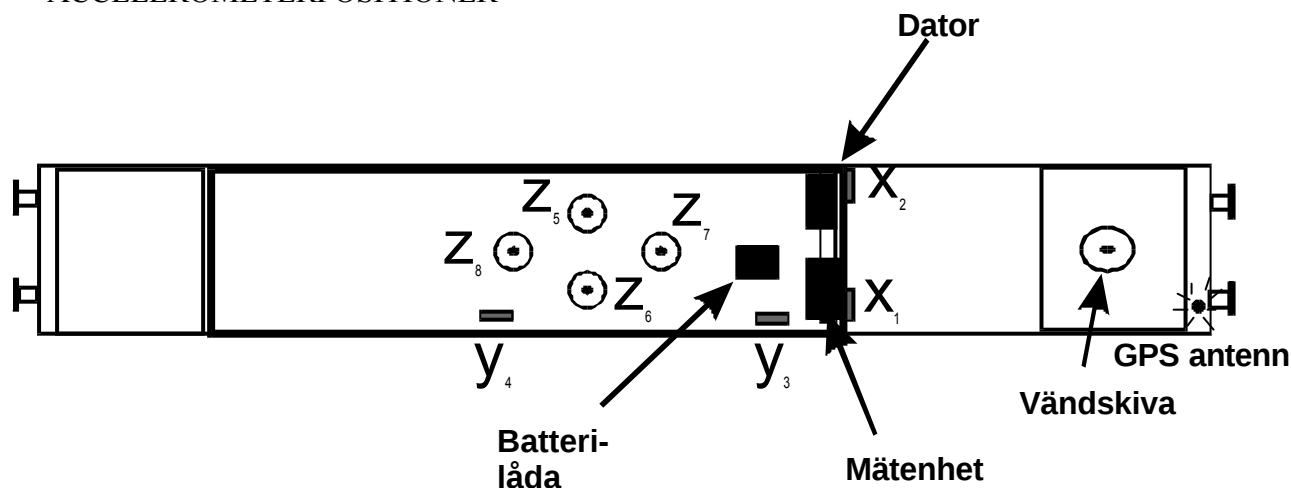
Wave Book /512, datalogger, 8 kanaler med WBK 13, lågpasfilter

8 st VTI Hamlin SCA100 accelerometrar

Furuno RDS-White Box, DGPS

SAMPLINGSFREKVENNS: 300 Hz

ACCELEROMETERPOSITIONER



Figur 1 Accelerometrarnas position under mätning 1.

OBSERVATIONER:

Accelerometrar har stabila medelvärden under hela mätningen. Signalerna från accelerometrar har registrerats under hela mätningen. Positionssignalen har registrerats under hela mätningen. Plott av positionssignal visas i Appendix VI.

ACCELERATIONER

Nedanstående tabell visar de högsta uppmätta accelerationerna för hela mätningen (samplingfrekvens 300 Hz) respektive de högsta accelerationerna med höga frekvenser bortfiltrerade:

Tabell 1 Registrerade maximala accelerationsnivåer med olika lågpasfiltrering. Prov 1.

<i>Max acceleration [g]</i>					
	Ofiltrerad signal	<100 Hz	<20 Hz	<8 Hz	Anpassat Filter
X ₁	4,32	2,15	0,85	0,75	0,69
X ₂	7,13	4,31	1,33	0,85	0,77
Y ₃	7,19	4,67	1,98	1,32	0,97
Y ₄	7,40	7,40	5,43	2,98	2,22
Z ₅	3,23	2,94	0,77	0,62	0,42
Z ₆	3,23	2,91	0,74	0,52	0,33
Z ₇	3,37	1,86	0,67	0,55	0,38
Z ₈	3,28	2,36	0,64	0,48	0,33

Notabelt är de höga accelerationer som registrerats av givare Y₄. Genomgående under provet uppvisar givaren väsentligt högre utslag än Y₃ och en amplitud som rimligen inte kan vara en acceleration av hela vagnen. Givarna satt likartat monterade på vagnens struktur. Kontroll av utrustningen efter mätningen har inte gett någon förklaring då allt har fungerat tillfredsställande.

En möjlig förklaring är att givaren monterats på en vek del av strukturen eller att infästningen inte varit fullgod vilket har lett till en förstärkning av accelerationerna. Då Y₃ var monterad på likartat sätt kan man inte utesluta att liknande förstärkning skett där.

Givare Y₄ utesluts i den fortsatta utvärderingen av prov 1 & 2.

FREKVENSPEKTRUM

Frekvensspektrum upp till 100 Hz för hela mätningen visas i Appendix II.

De accelerometrar som mäter vertikala accelerationer (5-8) uppvisar likformiga spektra med flera skarpa frekvenstoppar.

HÄNDELSER:

Accelerationerna har studerats vid låga frekvenser med det definierade lågpasfiltret för att hitta händelser med stora accelerationer och deras position längs banan. Accelerometer 4 utelämnas tills vidare.

Gränsnivån för registrering av ”incident” har valts till $Acc > 0,3 \text{ g}$. Detta inträffar 63 gånger under hela mätningens gång. Varje incidentförlopp har registrerats under 0,2 sekunder lika fördelat före och efter trigging. Detta innebär att fortsatt höga accelerationer efter 0,2 s registreras som en ny incident.

De 40 högsta accelerationerna visas rangordnade i Tabell 2.

Tabell 2 De 40 högsta accelerationerna under prov 1.

Ordn	Rel Tid	X1 [g]	X2 [g]	Y3 [g]	Y4 [g]	Z5 [g]	Z6 [g]	Z7 [g]	Z8 [g]	Hastighet [km/h]	Longitud	Latitud
1	03:37:42	0,17	0,16	0,95	1,33	0,22	0,20	0,11	0,11	104	13°52'08"	58°24'22"
2	03:26:36	0,16	0,11	0,84	1,50	0,11	0,13	0,13	0,15	103	13°35'27"	58°12'17"
3	00:38:32	0,69	0,77	0,20	1,61	0,12	0,26	0,19	0,11	2	11°59'13"	57°42'53"
4	06:02:45	0,08	0,10	0,76	0,46	0,08	0,10	0,09	0,10	101	16°27'05"	60°25'06"
5	03:37:20	0,09	0,09	0,76	0,94	0,18	0,11	0,15	0,13	104	13°51'30"	58°23'43"
6	03:26:30	0,16	0,09	0,75	1,10	0,13	0,11	0,11	0,15	102	13°35'16"	58°12'09"
7	03:26:02	0,15	0,15	0,70	1,20	0,12	0,11	0,14	0,17	99	13°34'30"	58°11'35"
8	03:38:56	0,17	0,12	0,69	1,56	0,20	0,14	0,17	0,12	105	13°53'12"	58°25'30"
9	03:39:00	0,19	0,12	0,65	0,91	0,13	0,08	0,15	0,13	105	13°53'16"	58°25'34"
10	03:44:47	0,17	0,10	0,65	1,63	0,18	0,12	0,22	0,12	98	13°59'58"	58°33'33"
11	01:20:44	0,31	0,29	0,65	0,67	0,10	0,14	0,13	0,12	49	12°45'39"	57°56'26"
12	03:26:39	0,16	0,11	0,64	1,32	0,11	0,14	0,13	0,14	103	13°35'31"	58°12'21"
13	03:26:04	0,13	0,11	0,62	1,77	0,19	0,13	0,15	0,15	98	13°34'35"	58°11'38"
14	03:30:37	0,11	0,16	0,62	1,00	0,11	0,16	0,10	0,11	101	13°42'47"	58°16'22"
15	03:30:43	0,11	0,11	0,59	0,56	0,16	0,18	0,10	0,13	100	13°49'40"	58°22'05"
16	03:26:07	0,11	0,07	0,58	0,88	0,15	0,12	0,13	0,12	99	13°34'49"	58°11'49"
17	03:39:05	0,17	0,14	0,57	1,06	0,13	0,15	0,11	0,13	101	13°53'23"	58°25'43"
18	03:42:59	0,10	0,08	0,56	0,64	0,08	0,10	0,10	0,07	99	13°59'11"	58°32'35"
19	03:39:03	0,20	0,15	0,55	1,33	0,20	0,11	0,15	0,16	103	13°53'19"	58°25'38"
20	03:26:33	0,17	0,13	0,55	1,48	0,13	0,13	0,16	0,13	103	13°35'21"	58°12'13"
21	03:27:18	0,10	0,10	0,54	0,79	0,09	0,10	0,07	0,09	106	13°37'02"	58°12'54"
22	03:27:27	0,16	0,13	0,53	0,60	0,09	0,13	0,18	0,12	102	13°37'21"	58°13'04"
23	03:38:53	0,15	0,09	0,52	1,30	0,09	0,12	0,08	0,11	105	13°53'08"	58°25'24"
24	03:51:16	0,10	0,15	0,51	1,02	0,08	0,13	0,08	0,11	98	14°07'31"	58°42'08"
25	03:46:18	0,08	0,13	0,51	0,92	0,23	0,19	0,17	0,19	98	14°02'27"	58°36'29"
26	04:51:16	0,16	0,12	0,50	0,69	0,25	0,24	0,23	0,31	98	15°13'08"	59°20'57"
27	03:26:42	0,14	0,14	0,49	0,93	0,13	0,13	0,16	0,13	103	13°35'36"	58°12'24"
28	03:45:31	0,15	0,07	0,49	0,62	0,07	0,10	0,09	0,09	98	14°00'37"	58°34'20"
29	00:38:35	0,48	0,41	0,23	0,70	0,11	0,17	0,10	0,07	1	11°59'11"	57°42'52"
30	03:39:09	0,13	0,14	0,48	0,83	0,12	0,08	0,11	0,12	98	13°53'27"	58°25'47"
31	03:47:32	0,09	0,10	0,47	1,31	0,14	0,13	0,13	0,14	99	14°02'48"	58°36'53"
32	06:04:29	0,17	0,06	0,47	2,20	0,10	0,09	0,12	0,13	103	16°27'05"	60°26'12"
33	06:04:48	0,12	0,15	0,46	0,91	0,11	0,14	0,09	0,12	99	16°27'18"	60°26'51"
34	03:51:44	0,16	0,07	0,46	1,03	0,13	0,21	0,17	0,19	97	14°07'51"	58°42'30"
35	04:46:37	0,12	0,07	0,46	0,81	0,08	0,11	0,11	0,12	103	15°11'54"	59°17'36"
36	06:04:22	0,11	0,10	0,44	0,84	0,29	0,24	0,25	0,33	103	16°27'04"	60°26'04"
37	03:41:19	0,11	0,09	0,44	0,52	0,08	0,09	0,11	0,15	97	13°57'17"	58°30'21"
38	03:27:21	0,12	0,10	0,43	0,67	0,12	0,09	0,11	0,13	105	13°37'08"	58°12'57"
39	03:49:19	0,11	0,07	0,43	0,56	0,08	0,07	0,13	0,07	99	14°07'05"	58°41'41"
40	03:39:12	0,13	0,11	0,43	0,63	0,11	0,09	0,11	0,09	95	13°54'16"	58°26'46"

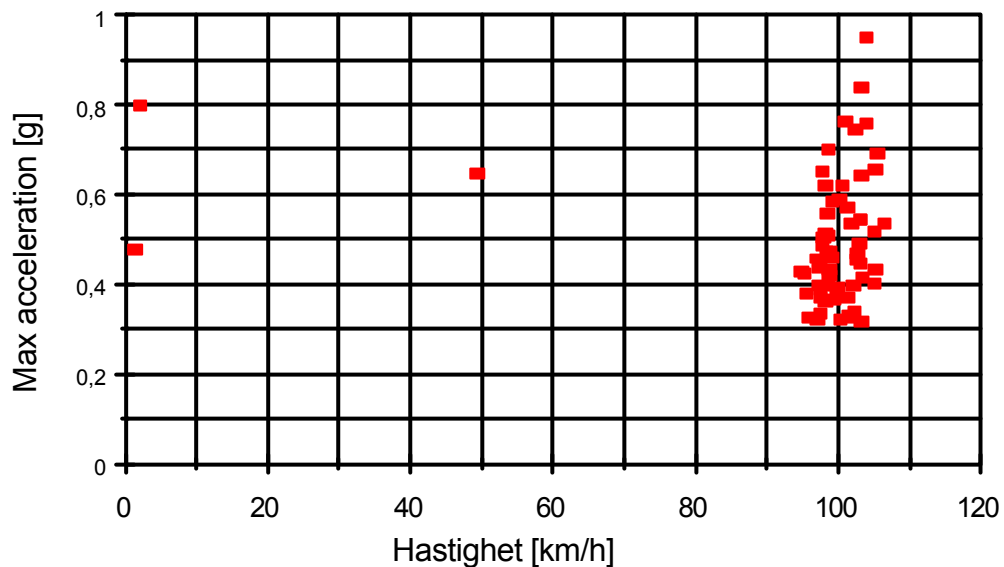
De registrerade incidenterna omfattar egentligen ett färre antal händelser men en del av dessa har så pass lång tidsvarighet att de registrerats flera gånger.

Den geografiska positionen av de högsta accelerationerna visas i Appendix VII "Identifierade banavsnitt med höga accelerationer". Av programtekniska skäl är positionsskalorna i diagrammet angivna med decimalgrader.

Figur 2 visar vilken hastighet som har hållits vid de värsta incidenterna. Av detta kan utläsas att ett stort antal av incidenterna inträffar vid hög fart, högre än 95 km/h. I tabellen ses att accelerationerna huvudsakligen är sidoaccelerationer på accelerometer 3. Därutöver finns ett fåtal incidenter vid mycket låg fart med accelerationer i vagnens längsriktning, dvs rangeringsstötar.

Hast. vid "accelerationsincidenter"

Prov 1, tom vagn



Figur 2 Hastighet vid "accelerationsincidenter" med mer än 0,3 g

Prov 2

MÄTNINGENS BETECKNING: PROV2

MÄTSTRÄCKA: Sundsvall-Göteborg

MÄTOBJEKT: Vagn 1: S-vagn lastad med 40'-container, Lastens vikt 23 ton

START: 2000-04-26 kl 17:06

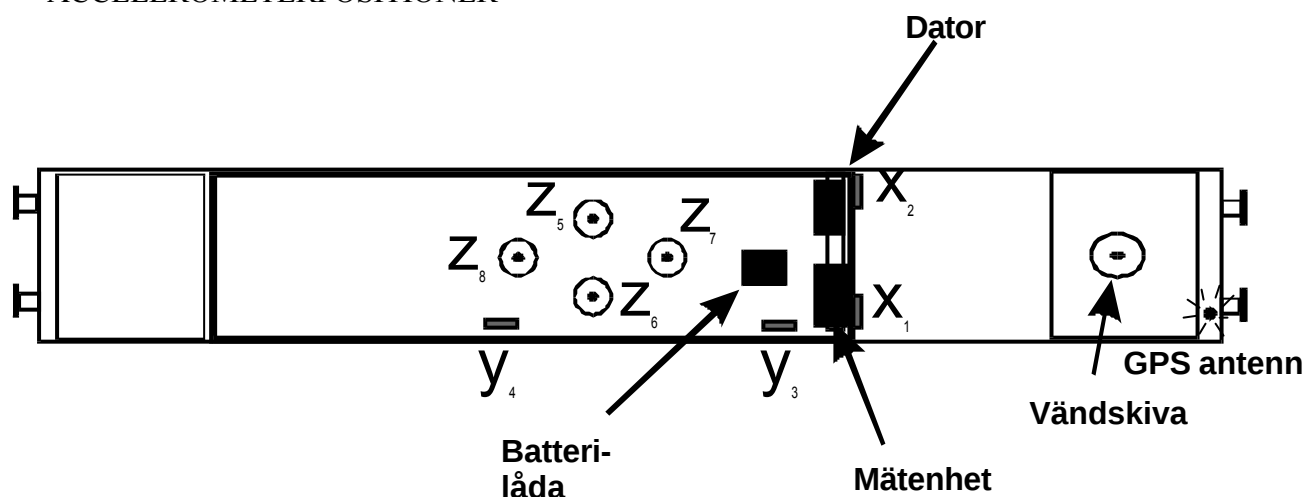
STOPP: 2000-04-27 kl 09:06

TOTALT: 16:00 h

UTRUSTNING: Se Prov 1

SAMPLINGSFREKVENNS: 300 Hz

ACCELEROMETERPOSITIONER



Figur 3 Accelerometrarnas position under mätning 2.

OBSERVATIONER:

Accelerometrar har stabila medelvärden under hela mätningen. Signalerna från accelerometrarna har registrerats under hela mätningen. Positionssignalen har registrerats under hela mätningen. Plott av positionssignal visas i Appendix VI. Notera att tåget tar en annan väg mellan Avesta och Frövi jämfört med prov 1 i norrgående riktning.

ACCELERATIONER

Nedanstående tabell visar de högsta uppmätta accelerationerna för hela mätningen (samplingssfrekvens 300 Hz) respektive de högsta accelerationerna med höga frekvenser bortfiltrerade:

Tabell 3 Registrerade maximala accelerationsnivåer, med olika lågpasfiltrering. Prov 2.

<i>Max acceleration [g]</i>					
	Ofiltrerad signal	<100 Hz	<20 Hz	<8 Hz	Anpassat Filter
X ₁	3,51	1,88	0,60	0,46	0,37
X ₂	4,56	3,05	0,78	0,52	0,23
Y ₃	3,18	1,61	1,16	0,61	0,29
Y ₄	7,00	7,31	3,61	2,44	2,04
Z ₅	3,05	2,95	0,76	0,58	0,43
Z ₆	3,21	2,77	0,72	0,47	0,33
Z ₇	2,87	2,78	0,76	0,48	0,36
Z ₈	2,76	2,26	0,63	0,50	0,35

Återigen registreras mycket höga accelerationer av givare Y₄. Se diskussion under Prov 1.

FREKVENSSPEKTRUM

Frekvensspektrum upp till 100 Hz för hela mätningen visas i Appendix II.

De accelerometrar som mäter vertikala accelerationer (5-8) uppvisar åter likformiga spektra med flera skarpa frekvenstoppar.

HÄNDELSER:

Accelerationerna har studerats vid låga frekvenser med det definierade lågpasfiltret för att hitta händelser med stora accelerationer och deras position längs banan. Accelerometer 4 utelämnas tills vidare.

Då accelerationsnivåerna genomgående är lägre än prov 1 väljs gränsvärden för registrering av ”incident” till $> 0,2$ g. Detta inträffar 65 gånger under hela mätningens gång. Varje incidentförlopp har registrerats under 0,64 sekunder lika fördelat före och efter trigging. Detta innebär att fortsatt höga accelerationer efter 0,64 s registreras som en ny incident.

Tabell 2 De 40 högsta accelerationerna under prov 2.

Ordn	Rel Tid	X1 [g]	X2 [g]	Y3 [g]	Y4 [g]	Z5 [g]	Z6 [g]	Z7 [g]	Z8 [g]	Hastighet [km/h]	Longitud	Latitud
1	06:02:17	0,06	0,06	0,12	0,21	0,33	0,30	0,29	0,35	96	15°08'30"	59°07'42"
2	05:43:25	0,08	0,05	0,09	0,36	0,28	0,27	0,31	0,32	84	15°22'04"	59°28'03"
3	05:07:31	0,06	0,09	0,09	0,17	0,27	0,28	0,29	0,30	82	16°27'48"	59°35'27"
4	06:21:10	0,13	0,04	0,12	0,28	0,27	0,26	0,25	0,30	90	14°27'46"	58°56'54"
5	02:26:20	0,29	0,03	0,09	0,16	0,04	0,04	0,07	0,05	90	16°59'04"	61°29'53"
6	04:29:23	0,08	0,05	0,08	0,33	0,28	0,27	0,22	0,29	92	16°17'30"	60°11'25"
7	05:53:51	0,06	0,05	0,14	0,22	0,28	0,23	0,28	0,25	89	15°10'32"	59°14'18"
8	05:14:13	0,06	0,05	0,08	0,19	0,28	0,25	0,28	0,25	82	16°13'30"	59°33'37"
9	06:12:51	0,05	0,05	0,12	0,34	0,24	0,27	0,22	0,28	88	14°57'54"	59°02'33"
10	05:43:37	0,09	0,08	0,15	0,35	0,25	0,26	0,27	0,28	74	15°18'18"	59°25'45"
11	05:19:55	0,07	0,07	0,20	0,24	0,21	0,24	0,23	0,27	76	15°48'18"	59°24'39"
12	01:48:20	0,08	0,05	0,07	0,74	0,22	0,22	0,20	0,27	93	17°14'50"	61°58'13"
13	04:11:34	0,04	0,05	0,12	0,55	0,24	0,25	0,23	0,27	91	16°27'10"	60°25'15"
14	01:41:43	0,06	0,06	0,13	0,25	0,25	0,26	0,26	0,27	97	17°16'10"	62°03'45"
15	01:46:55	0,13	0,07	0,26	0,85	0,21	0,19	0,19	0,22	97	17°15'11"	61°59'30"
16	05:13:57	0,09	0,08	0,11	0,42	0,24	0,23	0,23	0,26	85	16°13'49"	59°33'46"
17	01:49:13	0,05	0,04	0,09	0,28	0,23	0,23	0,26	0,23	94	17°11'31"	61°49'53"
18	06:13:23	0,06	0,05	0,08	0,24	0,23	0,26	0,24	0,25	81	14°52'10"	59°01'22"
19	03:14:52	0,08	0,05	0,11	0,36	0,20	0,22	0,23	0,25	95	17°10'18"	60°44'25"
20	03:19:16	0,09	0,07	0,13	0,34	0,25	0,25	0,23	0,22	92	17°09'03"	60°42'49"
21	02:32:09	0,25	0,02	0,12	0,29	0,04	0,04	0,06	0,06	35	17°00'02"	61°22'09"
22	02:30:40	0,25	0,03	0,08	0,24	0,07	0,06	0,08	0,08	95	16°59'24"	61°25'09"
23	07:31:51	0,07	0,07	0,18	0,88	0,19	0,18	0,21	0,24	91	12°25'45"	57°51'56"
24	02:38:49	0,24	0,07	0,07	0,33	0,18	0,14	0,16	0,21	97	17°05'33"	61°14'11"
25	05:19:16	0,11	0,10	0,11	0,22	0,21	0,21	0,21	0,24	86	16°01'36"	59°30'07"
26	02:42:06	0,10	0,08	0,12	0,94	0,19	0,18	0,20	0,24	96	17°08'23"	61°08'52"
27	04:56:11	0,09	0,06	0,06	0,15	0,24	0,23	0,23	0,23	94	16°37'19"	59°45'48"
28	05:50:44	0,06	0,06	0,11	0,34	0,22	0,22	0,24	0,22	91	15°13'34"	59°21'43"
29	01:12:47	0,08	0,04	0,09	0,35	0,23	0,18	0,19	0,24	86	17°22'31"	62°18'00"
30	05:06:32	0,05	0,06	0,08	0,22	0,20	0,20	0,20	0,24	78	16°32'37"	59°36'15"
31	03:19:38	0,09	0,07	0,10	0,22	0,22	0,24	0,23	0,22	89	16°46'42"	60°37'33"
32	05:42:41	0,05	0,04	0,19	0,20	0,23	0,23	0,19	0,24	92	15°22'49"	59°27'57"
33	03:09:27	0,06	0,06	0,12	0,37	0,17	0,19	0,24	0,19	99	17°03'14"	60°54'38"
34	07:44:05	0,09	0,05	0,21	0,68	0,17	0,19	0,18	0,24	92	12°09'05"	09°44'50"
35	02:29:12	0,24	0,07	0,15	0,73	0,03	0,04	0,07	0,05	96	16°59'17"	61°25'48"
36	02:13:05	0,07	0,05	0,06	0,16	0,20	0,21	0,21	0,23	79	17°05'01"	61°39'10"
37	02:10:40	0,21	0,05	0,09	0,38	0,21	0,19	0,20	0,23	75	17°08'29"	61°45'14"
38	01:14:08	0,05	0,04	0,11	0,47	0,21	0,23	0,21	0,20	85	17°22'42"	62°16'29"
39	07:43:03	0,08	0,07	0,21	1,08	0,18	0,23	0,19	0,21	90	12°13'26"	09°45'11"
40	05:59:23	0,07	0,05	0,11	0,19	0,19	0,23	0,20	0,22	97	15°09'21"	59°10'34"

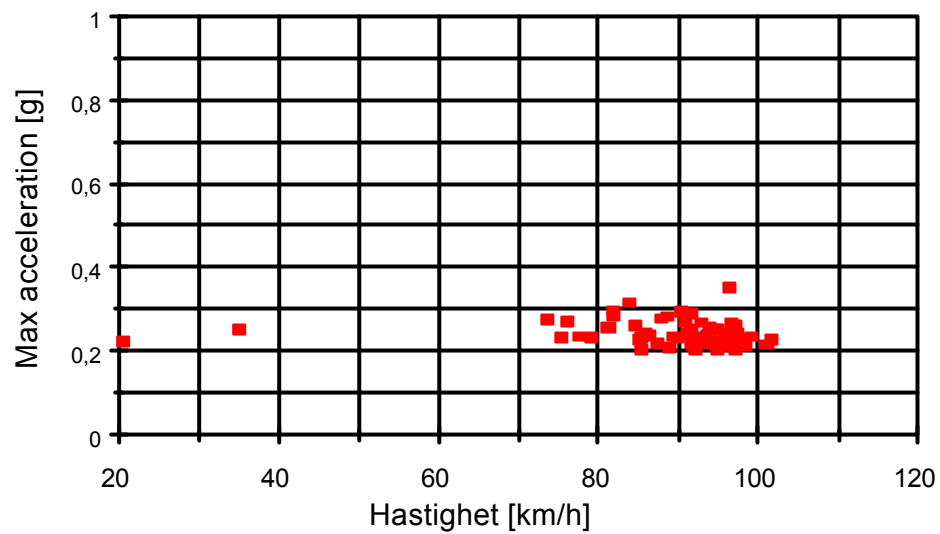
De registrerade 40 incidenterna omfattar egentligen ett färre antal händelser men en del av dessa har så pass lång tidsvarighet att de registrerats flera gånger.

Den geografiska positionen av de högsta accelerationerna visas i Appendix VII. Av programtekniska skäl är positionsskalorna i diagrammet angivna med decimalgrader.

Figur 4 visar vilken hastighet som har hållits vid de värsta incidenterna.

Hast. vid "accelerationsincidenter"

Prov 2, containerlast



Figur 4 Hastighet vid "accelerationsincidenter" med mer än 0,2 g

De registrerade accelerationerna är genomgående låga i alla riktningar.

Prov 3

MÄTNINGENS BETECKNING: PROV3

MÄTSTRÄCKA: Göteborg-Sundsvall

MÄTOBJEKT: Vagn 1: S-vagn med last av semitrailer. Lastens vikt 25 ton.

START: 2000-04-24 kl 16:30

STOPP: 2000-04-24 kl 17:34

TOTALT: 1:44 h

UTRUSTNING: MiTAC 5033 , laptop

DASY Lab+, programvara

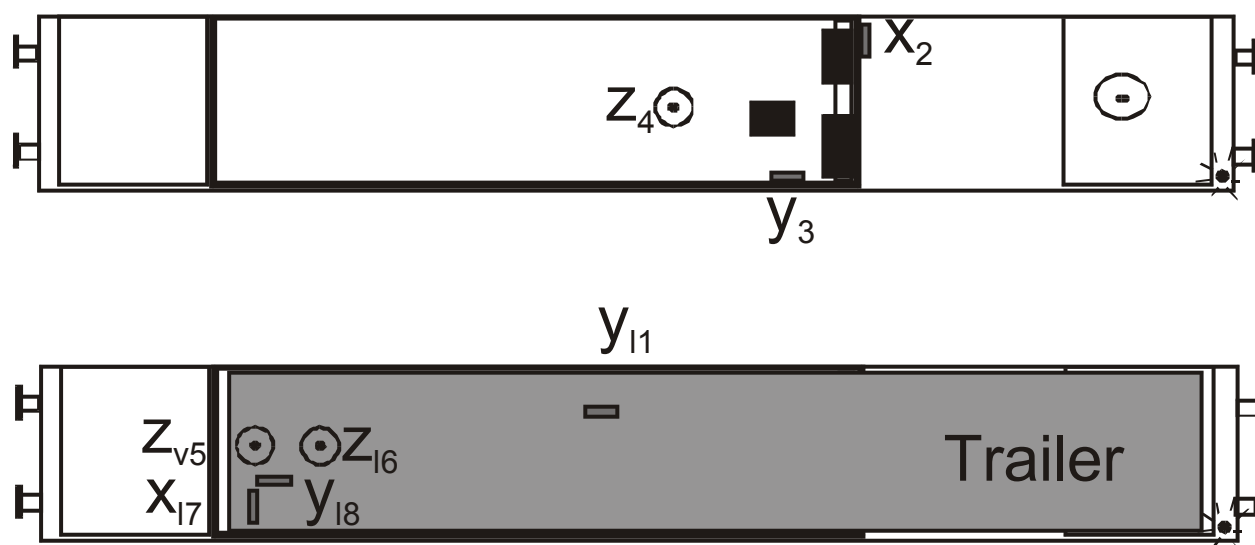
Wave Book /512, datalogger, 8 kanaler med WBK 13, lågpasfilter

8 st VTI Hamlin SCA100 accelerometrar

Furuno RDS-White Box, DGPS

SAMPLINGSFREKVENNS: 300 Hz

ACCELEROMETERPOSITIONER



y11= Tvärsacc på lastpall lager 2

x2= Längsacc. vagn

y3= Tvärsacc. vagn

z4= Vertikalacc. vagn

zv5= Vertikalacc på trailergolv

zl6= Vertikalacc på topp av last

xl7= Längsacc. på lastpall

y18= Tvärsacc på lastpall

Figur 5

OBSERVATIONER

Alla mätsignaler upphör efter 1.04 h Avbrottets utseende tyder på att strömförsörjningen upphört åtminstone till laptopen. Exakta orsaken är okänd. Vid kontroll efter prov fungerade utrustningen.

ACCELERATIONER

Utvärderades ej

FREKVENSSPEKTRUM

Utvärderades ej

HÄNDELSER

Utvärderades ej

Prov 4

MÄTNINGENS BETECKNING: PROV4

MÄTSTRÄCKA: Sundsvall - Göteborg

MÄTOBJEKT: Vagn 1: S-vagn med last av semitrailer. Lastens vikt 30 ton

START: 2000-04-28 kl 16:36

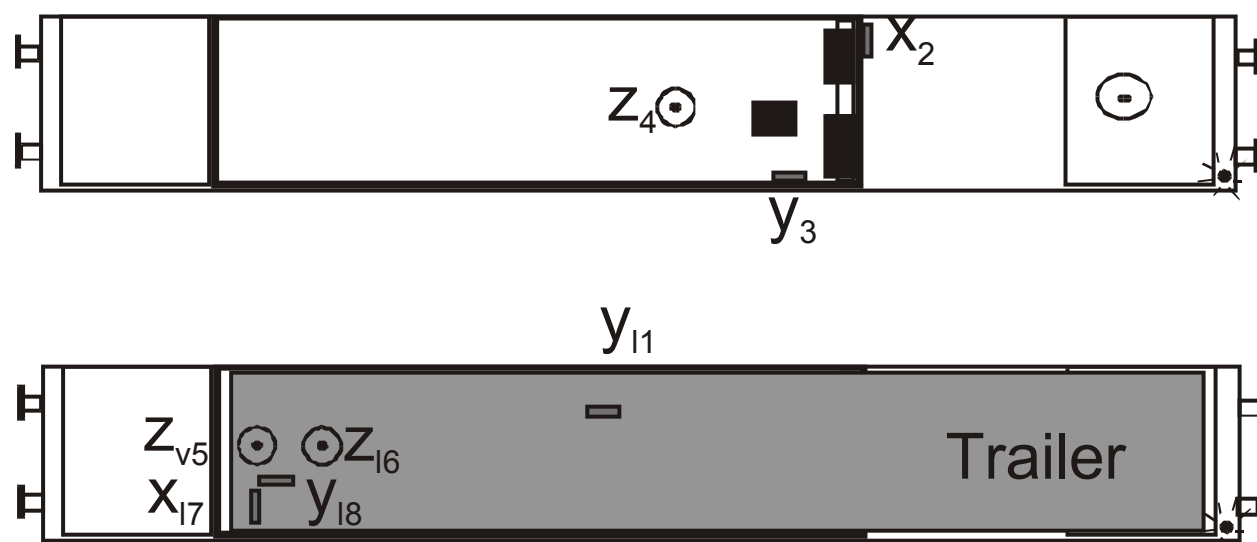
STOPP: 2000-04-29 kl 07:26

TOTALT: 15:56 h

UTRUSTNING: Se Prov 1

SAMPLINGSFREKVENNS: 300 Hz

ACCELEROMETERPOSITIONER



y_{11} = Tvärsacc på lastpall lager 2

x_2 = Längsacc. vagn

y_3 = Tvärsacc. vagn

z_4 = Vertikalacc. vagn

z_{v5} = Vertikalacc på trailergolv

z_{16} = Vertikalacc på topp av last

x_{17} = Längsacc. på lastpall

y_{18} = Tvärsacc på lastpall

Figur 6

OBSERVATIONER:

Accelerometrar har stabila medelvärden under hela mätningen. Signalerna från accelerometrarna har registrerats under hela mätningen. Positionssignalen har registrerats under hela mätningen. Plott av positionssignal visas i Appendix VI.

ACCELERATIONER

Nedanstående tabell visar de högsta uppmätta accelerationerna för hela mätningen (samplingfrekvens 300 Hz) respektive de högsta accelerationerna med höga frekvenser bortfiltrerade:

Max acceleration [g]					
	Ofilteradsignal	<100 Hz	<20 Hz	<8 Hz	Anpassat Filter
Y ₁	1,89	0,91	0,30	0,26	0,23
X ₂	2,37	1,90	0,88	0,55	0,45
Y ₃	5,02	2,46	1,09	0,66	0,41
Z ₄	4,10	3,19	0,67	0,38	0,34
Zv ₅	1,28	1,21	1,19	1,12	0,85
Zl ₆	1,25	1,19	1,07	1,00	0,77
Xl ₇	1,36	0,97	0,24	0,16	0,15
Yl ₈	1,45	1,09	0,47	0,39	0,33

Till skillnad mot prov 1 & 2 utmärker sig ingen av accelerometerna med extremt höga accelerationsnivåer.

FREKVENSPEKTRUM

Frekvensspektrum upp till 100 Hz för hela mätningen visas i Appendix II.

HÄNDELSER:

Accelerationerna har studerats vid låga frekvenser med det definierade lågpåssfiltret för att hitta händelser med stora accelerationer och deras position längs banan.

Gränsnivån för registrering av ”incident” har valts till $\text{Acc} > 0,3 \text{ g}$. Detta inträffar 290 gånger under hela mätningens gång. Varje incidentförlopp har registrerats under 0,2 sekunder lika fördelat före och efter triggnings. Detta innebär att fortsatt höga accelerationer efter 0,2 s registreras som en ny incident.

De 40 högsta accelerationerna visas rangordnade i.

Tabell 2 De 40 högsta accelerationerna under prov 4.

Ordnr	Rel Tid	Y ₁ [g]	X ₂ [g]	Y ₃ [g]	Z ₄ [g]	Zv ₅ [g]	Zl ₆ [g]	Xl ₇ [g]	Yl ₈ [g]	Hastighet [km/h]	Longitud	Latitud
1	05:18:33	0,13	0,07	0,11	0,19	0,75	0,75	0,04	0,09	110	16°38'32"	59°47'40"
2	04:38:19	0,14	0,20	0,12	0,20	0,68	0,70	0,05	0,12	102	16°32'15"	60°35'00"
3	05:20:20	0,16	0,07	0,10	0,23	0,70	0,69	0,05	0,12	110	16°38'56"	59°45'22"
4	06:19:32	0,14	0,07	0,20	0,29	0,68	0,69	0,05	0,08	108	15°13'03"	59°20'45"
5	04:56:23	0,18	0,13	0,13	0,27	0,67	0,66	0,05	0,20	107	16°17'53"	60°11'35"
6	06:46:16	0,15	0,10	0,10	0,28	0,61	0,64	0,06	0,09	92	14°56'56"	59°02'20"
7	06:28:54	0,12	0,13	0,08	0,20	0,60	0,58	0,07	0,09	97	15°08'32"	59°07'44"
8	06:28:57	0,13	0,11	0,10	0,24	0,59	0,58	0,05	0,11	98	15°08'30"	59°07'38"
9	06:53:51	0,14	0,14	0,11	0,22	0,58	0,53	0,05	0,12	110	14°35'51"	58°59'01"
10	06:26:00	0,15	0,18	0,16	0,29	0,57	0,57	0,04	0,22	107	15°09'48"	59°12'07"
11	04:56:30	0,19	0,14	0,15	0,25	0,53	0,57	0,06	0,15	105	16°17'30"	60°11'19"
12	02:08:43	0,13	0,09	0,12	0,26	0,54	0,56	0,06	0,10	91	17°20'12"	62°06'52"
13	04:44:41	0,16	0,16	0,12	0,29	0,54	0,55	0,04	0,16	95	16°26'04"	60°22'40"
14	05:18:30	0,15	0,06	0,13	0,23	0,55	0,55	0,05	0,11	110	16°38'27"	59°48'24"
15	03:34:19	0,13	0,10	0,13	0,24	0,54	0,53	0,06	0,10	96	17°10'23"	60°43'52"

16	05:55:13	0,14	0,10	0,11	0,28	0,53	0,54	0,05	0,12	109	15°56'35"	59°26'15"
17	03:00:04	0,15	0,21	0,10	0,22	0,54	0,54	0,04	0,12	80	16°59'41"	61°24'08"
18	04:58:05	0,12	0,06	0,07	0,26	0,54	0,54	0,04	0,06	103	16°15'17"	60°09'27"
19	04:55:52	0,16	0,08	0,13	0,25	0,53	0,54	0,05	0,11	109	16°18'37"	60°12'19"
20	06:26:09	0,19	0,10	0,13	0,24	0,53	0,53	0,05	0,19	107	15°09'46"	59°11'53"
21	05:57:52	0,09	0,10	0,26	0,24	0,53	0,53	0,06	0,12	106	15°51'05"	59°23'50"
22	02:50:34	0,16	0,20	0,21	0,32	0,52	0,53	0,04	0,21	99	17°02'59"	61°37'08"
23	06:18:09	0,14	0,08	0,09	0,24	0,53	0,52	0,05	0,11	96	15°13'37"	59°21'55"
24	06:53:20	0,12	0,14	0,13	0,17	0,52	0,53	0,05	0,10	112	14°38'18"	58°59'37"
25	06:20:29	0,14	0,12	0,10	0,20	0,52	0,52	0,04	0,12	105	15°13'14"	59°19'11"
26	06:10:58	0,12	0,12	0,13	0,29	0,51	0,49	0,05	0,21	88	15°23'05"	59°27'55"
27	06:19:41	0,14	0,08	0,15	0,24	0,51	0,50	0,06	0,12	108	15°13'04"	59°20'22"
28	04:38:47	0,17	0,11	0,19	0,26	0,50	0,51	0,06	0,18	107	16°31'07"	60°34'32"
29	06:48:54	0,14	0,14	0,13	0,22	0,50	0,50	0,05	0,10	104	14°50'53"	59°01'09"
30	06:26:04	0,18	0,08	0,12	0,19	0,49	0,50	0,04	0,17	107	15°09'47"	59°12'00"
31	02:49:38	0,14	0,23	0,14	0,24	0,48	0,50	0,06	0,08	100	17°04'45"	61°38'21"
32	06:19:19	0,12	0,09	0,14	0,19	0,48	0,50	0,05	0,14	106	15°13'08"	59°20'59"
33	03:21:18	0,12	0,18	0,14	0,21	0,49	0,50	0,03	0,10	98	17°02'24"	60°55'39"
34	02:31:08	0,20	0,09	0,25	0,20	0,48	0,50	0,04	0,14	92	17°10'43"	61°47'40"
35	03:21:08	0,14	0,11	0,11	0,26	0,49	0,48	0,05	0,09	100	17°02'15"	60°55'51"
36	04:37:11	0,12	0,14	0,10	0,21	0,46	0,49	0,05	0,15	102	16°34'57"	60°35'32"
37	04:37:22	0,14	0,10	0,11	0,24	0,49	0,49	0,03	0,10	103	16°34'40"	60°35'32"
38	04:55:23	0,15	0,12	0,10	0,23	0,49	0,49	0,03	0,10	106	16°19'09"	60°12'47"
39	06:13:34	0,13	0,10	0,09	0,21	0,49	0,49	0,05	0,11	104	15°17'29"	59°26'40"
40	04:38:22	0,13	0,14	0,09	0,21	0,47	0,49	0,05	0,13	101	16°32'09"	60°34'57"

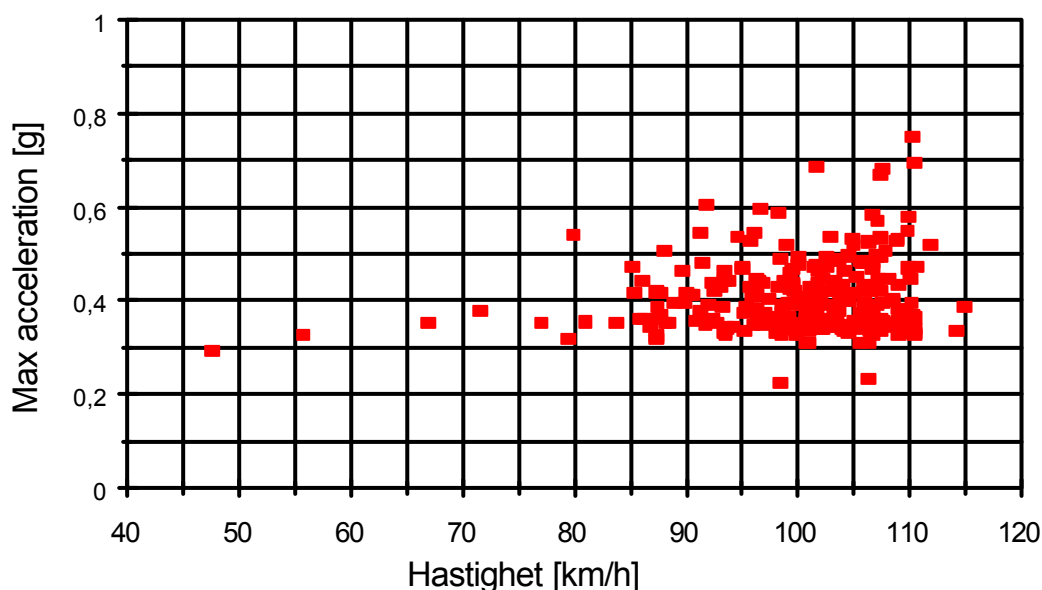
De registrerade 40 incidenterna omfattar egentligen ett färre antal händelser men en del av dessa har så pass lång tidsvarighet att de registrerats flera gånger.

Den geografiska positionen av de högsta accelerationerna visas i Appendix VII. Av programtekniska skäl är positionsskalorna i diagrammet angivna med decimalgrader.

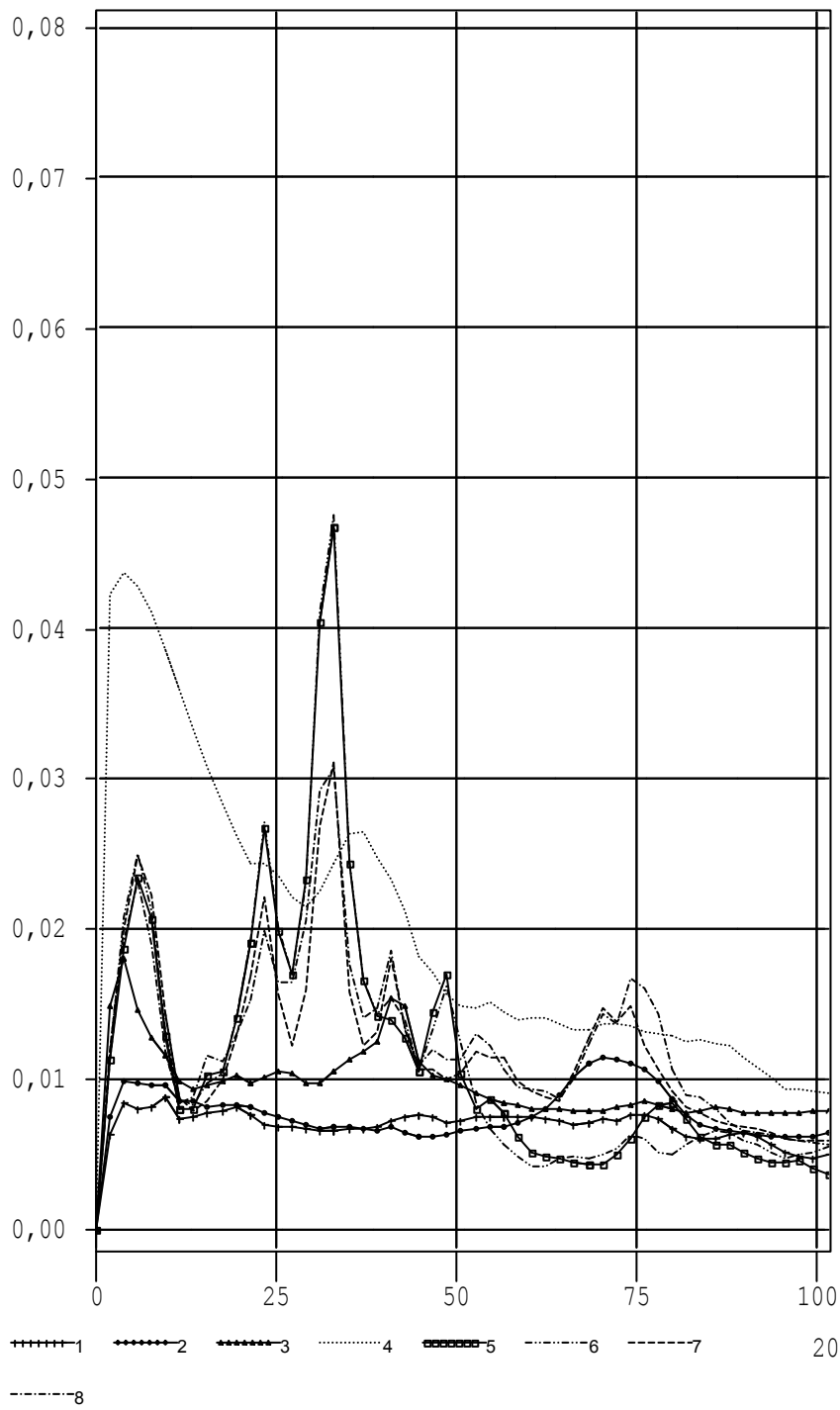
Figur 4 visar vilken hastighet som har hållits vid de värsta incidenterna.

Hast. vid "accelerationsincidenter"

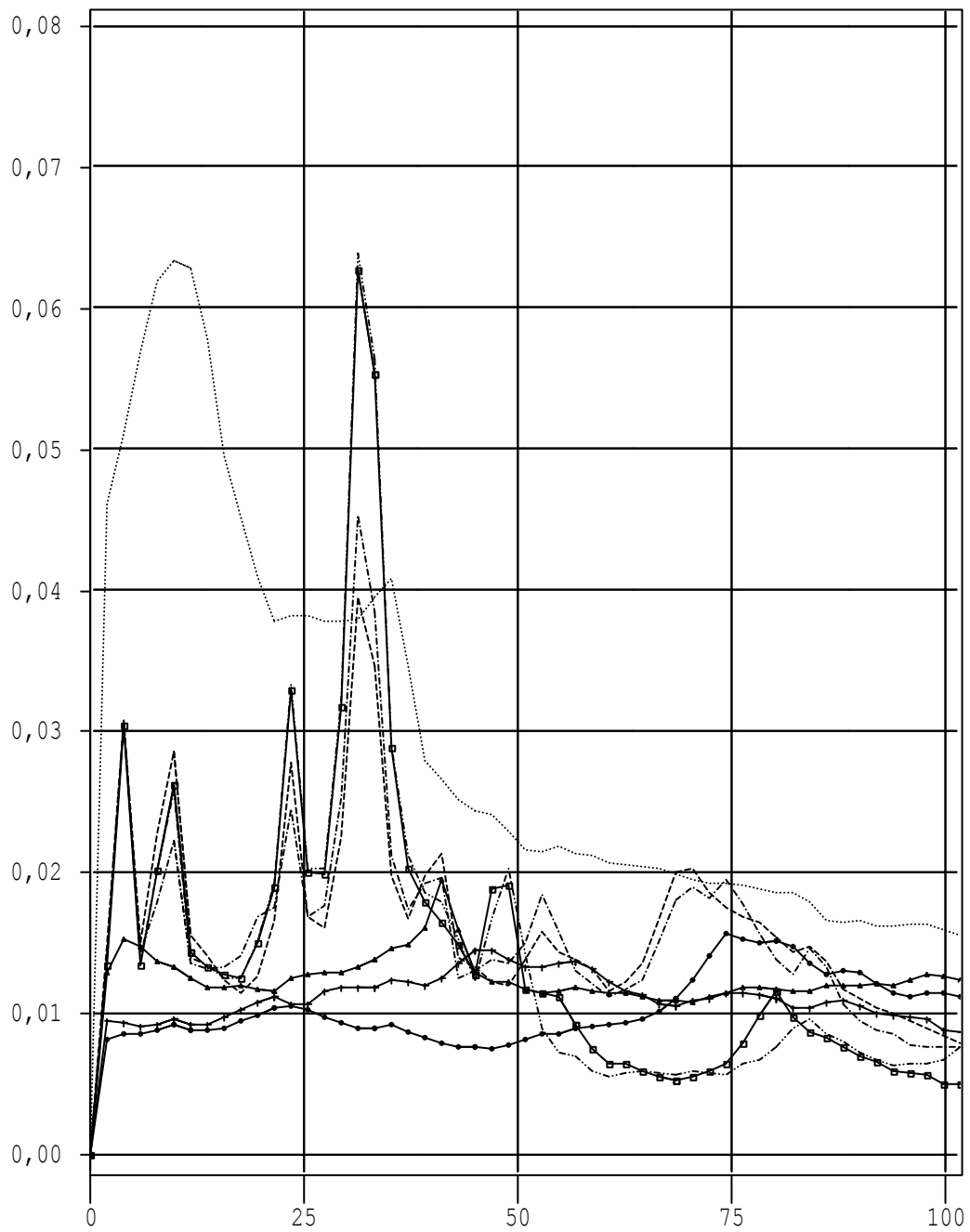
Prov 4, trailerlast



Prov 1 Frekvensspektrum



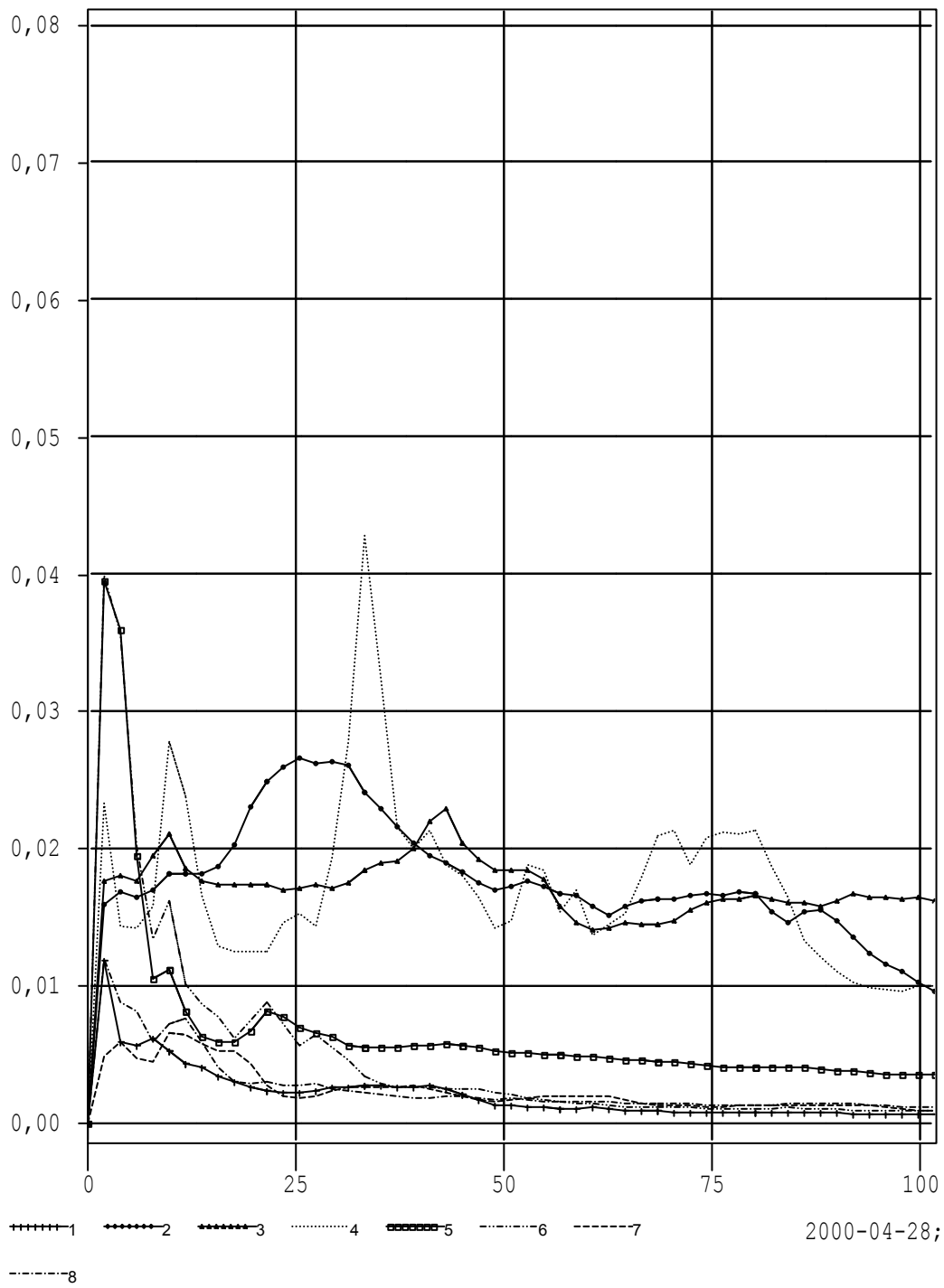
Prov 2 Frekvensspektrum



+ + + + + 1 • • • • • 2 * * * * * 3 4 □ □ □ □ □ 5 - . - . - . 6 - - - - - 7
 - - - - - 8

2000-04-26;17:12:30

Prov 4 Frekvensspektrum



Teori och arbetsgång vid "pingning" av vagnen

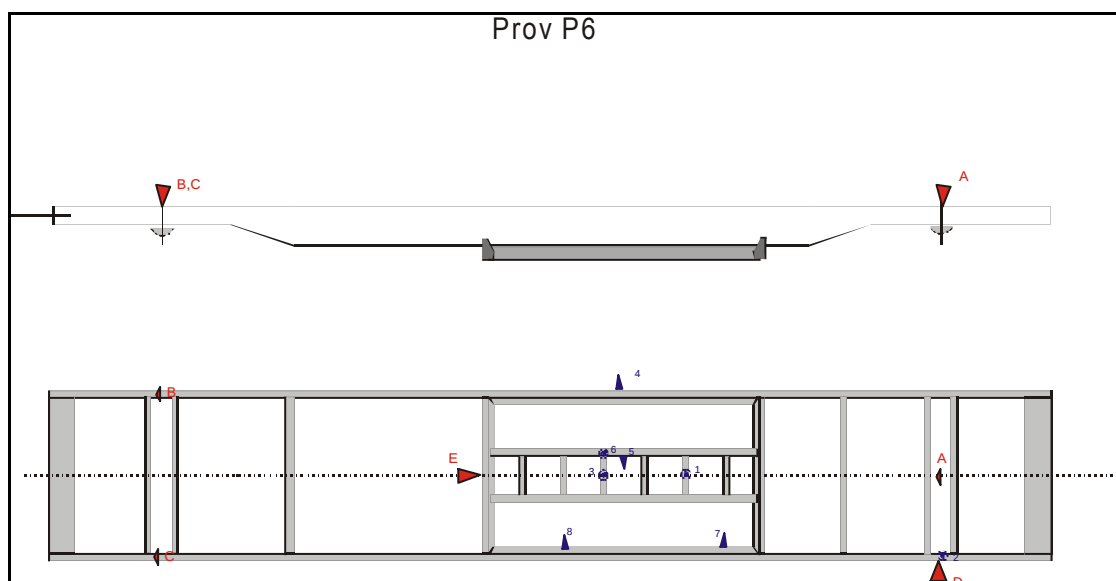
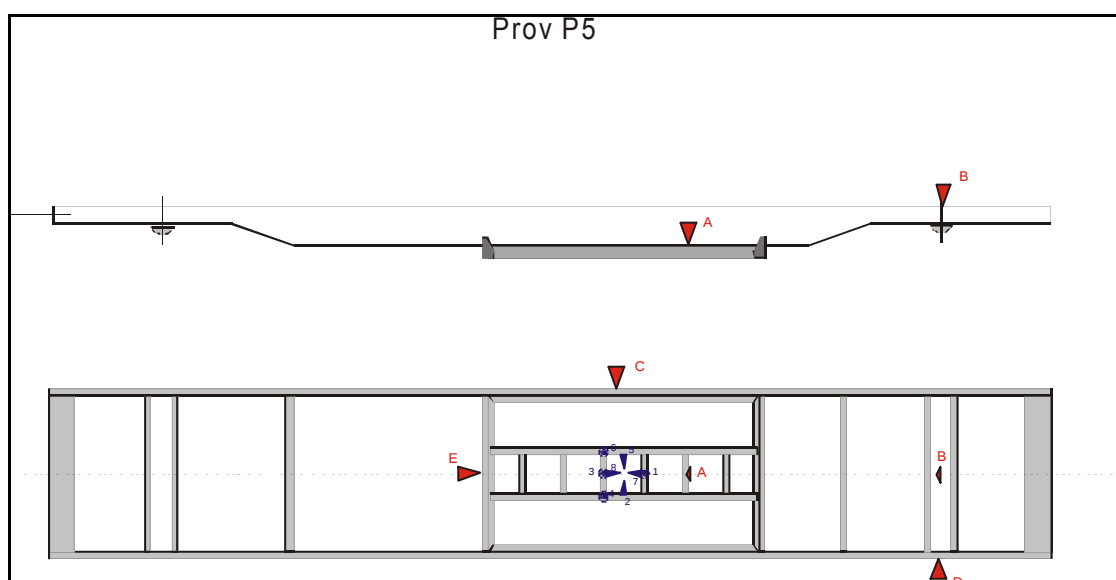
En stillastående vagn "pingades", d. v. s. exciterades på olika ställen med olika accelerometerkonfigurationer. Excitationen i lodrät led skedde genom hård stampning, i vågrät led genom slag med träklubba.

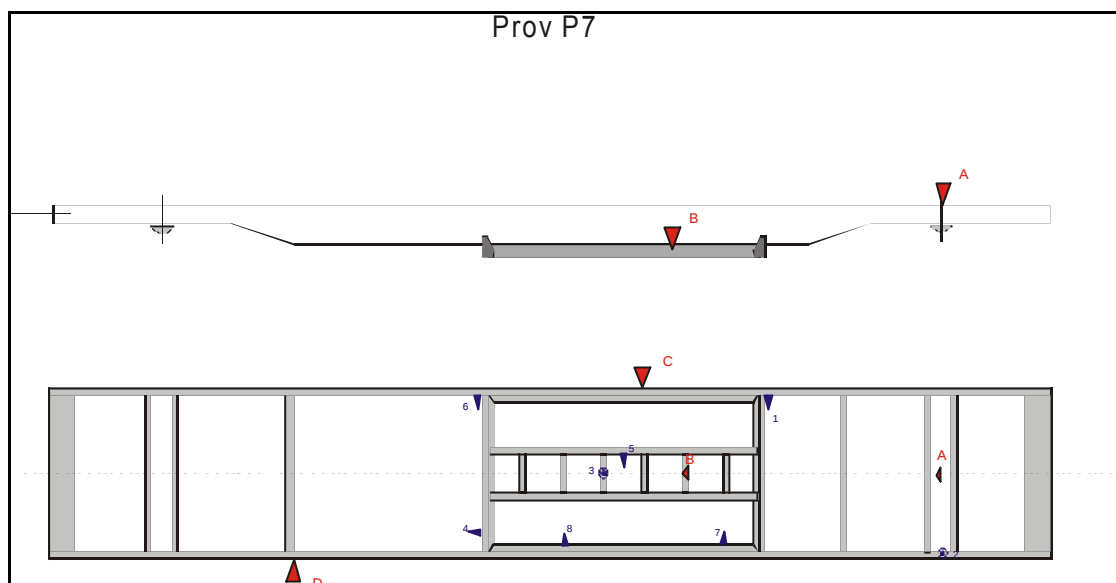
De två första proven avsåg jämförelse mellan olika metoder för montering av accelerometrar. Det konstaterades att för detta ändamål var vanlig häftmassa av den typ som säljs i bokhandeln tillräcklig.

En mindre rangerstöt simulerades även genom att vagnen bringades att kollidera med loket med ca 0,3 m/s.

Excitationens maximala energiinnehåll bedömdes understiga 2 Nm, oräknat stötförluster.

Följande placeringar av accelerometrar och excitationpunkter användes:





Prov	Accelerometrar	Knack	Anm
P5A	P5 1 mont Klämma 3 mont Tejp 4 mont Klibb 6 mont Klämma	4 x A	Prov av accelerometer- montage
P5B	"	"	"
P5C	1-8 P5	3 x A, 3 x B	
P5D	"	3 x A	
P5E	"	3 x B	
P5F	"	3 x C	
P5G	"	3 x D	
P5H	"	3 x E	
P6A	1-8 P6	3 x A, 3 x B, 3 x C	
P6B	"	3 x D	
P7A	1-8 P7	3 x A, 3 x B, 3 x C	
P7B	"	3 x D	
P7C	"	Rangerstöt	
P7D	"	"	

Resultat:

För de lodräta svängningarna kunde konstateras att tre tydliga moder föreligger. På den aktuella vagnen svängde dessa moder med 7, 23 och 33 Hz., och det var möjligt att tydligt känna med foten att en egenfrekvens på omkring 10 Hz förelåg.

På ofiltrerad signal erhöles flera gånger accelerationsnivåer över 3g , trots den måttliga excitationen.

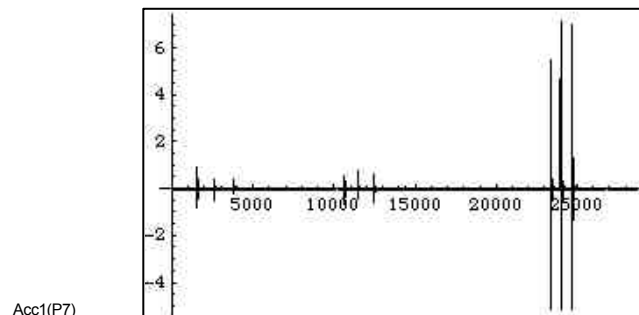
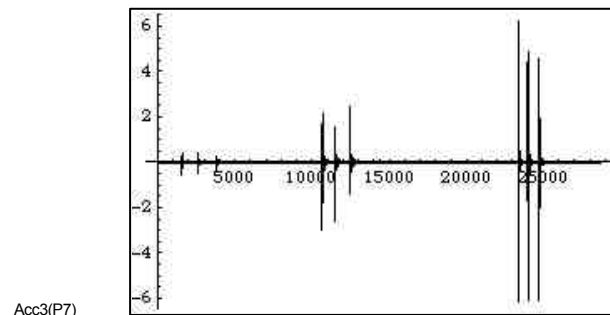
En modanalys av de viktigaste svängningsmodernerna genomfördes. Följande tabeller summerar resultaten med modmassorna angivna i kg. Jämförelse mellan modmassor och vagnens massa ger sedan underlag för dimensionering av ett lämpligt filter.

ODÄMPAD LODRÄT STÖT PÅ VAGNEN. EFFEKTIVA MASSOR BERÄKNADE I LODRÄT REGISTRERANDE ACCELEROMETRAR															
Acc	P5B knack 2	P5B knack 3	P5B knack 4	P5B knack 5	P5C knack 1	P5C knack 2	P5C knack 3	P5D knack 1	P5D knack 2	P5D knack 3	P7	P7	P7		Lodrat odämpad stöt; lodrat svar
1(P5)	106	107	255	127	289	78	46	67	54	187				132	Medel effektiv massa acc1 (P5)
3(P5)	332	133	75	137	46	50	22	161	103	702				176	Medel effektiv massa acc3 (P5)
4(P5)	1250	680	956	1084	608	371	387	51	1026	1960				837	Medel effektiv massa acc4 (P5)
6(P5)	1519	284	266	1068	25	52	27	54	90	81				347	Medel effektiv massa acc6 (P5)
2(P7)											5167	6303	27834	13101	Medel effektiv massa acc2 (P7)
3(P7)											169	82	115	122	Medel effektiv massa acc3 (P7)
														1187	MEDEL TOTALT
														355	MEDEL oräknat acc2 (P7)

ODÄMPAD VÄGRÄT STÖT PÅ VAGNEN. EFFEKTIVA MASSOR BERÄKNADE I VÄGRÄT REGISTRERANDE ACCELEROMETRAR															
	P5F knack 1	P5F knack 2	P5F knack 3	P7A knack 7	P7A knack 8	P7A knack 9									Vågrät odämpad stöt; vågrät svar
2(P5)	61	559	269												296
5(P5)	68	78	389												178
1(P7)				18	6	12									12
5(P7, P5)				34	27	45									35
6(P7)				42	267	13									107
7(P7)				156	147	336									213
8(P7)				246	296	119									220
															152
															MEDEL TOTALT

KOPPLING VÄGRÄT, LODRÄT: VÄGRÄT ODÄMPAD STÖT TVÄRS VAGNEN. EFFEKTIVA MASSOR FÖR LODRÄT REGISTRERANDE ACCELEROMETRAR															
	P5F knack 1	P5F knack 2	P5F knack 3	P7A knack 7	P7A knack 8	P7A knack 9									
1(P5)	21	23	37												27
3(P5)	43	98	91												77
4(P5)	273	84	112												156
6(P5)	30	6	188												75
2(P7)				718	638	1224									860
3(P7)				10	166	9									62
															210
															75
															MEDEL TOTALT
															MEDEL oräknat acc2 (P7)

AV KOPPLINGSBERÄKNINGEN FRAMGÅR ATT DEN LODRÄTA RESPONSEN ÄR STÖRRE VID EN VÄGRÄT, ODÄMPAD STÖT ÄN VAD DEN ÄR VID EN LODRÄT. NATURLIGTVIS FRAMGÅR OCKSÅ DETTA OMEDELBART AV TIDSSERIEN FÖR acc3(P7), DÅR STÖTSERIEN ÄR 3 GGR LODRÄT VID AXELN (DÄMPAD), 3 GGR LODRÄT VID VAGGAN (ODÄMPAD) SAMT 3 GGR TVÄRS VAGNEN MITT PÅ (ODÄMPAD). DEN VÄGRÄTA RESPONSEN FÖLJER SAMMA MÖNSTER, D. V. S. STÖRRE RESPONS VID VÄGRÄT ACCELERATION.



	KOPPLING VÅGRÄT_LODRÄT: VÅGRÄTSTÖT PÅ HJULEN TVÄRS VAGNEN. EFFEKTIVA MASSOR FÖR LODRÄT REGISTRERANDE ACCELEROMETRAR										
	P5G knack 1	P5G knack 2	P5G knack 3	P5G knack 4	P5G knack 5	P5G knack 6	P6B knack 1	P6B knack 2	P6B knack 3		Vågrät dämpad stöt mot hjul
1(P5)	87	148	973	233	134	187				294	
3(P5)	215	705	2067	83	43	165				546	
4(P5)	2644	722	1681	473	296	2362				1363	
6(P5)	991	6474	712	187	61	1166				1599	
1(P6)							184	445	212	280	
2(P6)							6537	1493	3908	3979	
3(P5,P6)							1752	2421	150	1441	
6(P5,P6)							1344	781	2393	1506	
										1234	MEDEL TOTALT
										985	MEDEL oräknat acc2 (P6)

	VÅGRÄTSTÖT PÅ HJULEN TVÄRS VAGNEN. EFFEKTIVA MASSOR FÖR VÅGRÄT REGISTRERANDE ACCELEROMETRAR										
	P5G knack 1	P5G knack 2	P5G knack 3	P5G knack 4	P5G knack 5	P5G knack 6	P6B knack 1	P6B knack 2	P6B knack 3		
2(P5)	1194	5075	11607	1318	467	2242				3651	
5(P5)	710	3280	4183	743	329	1243				1748	
4(P6)							991	464	1912	1122	
5(P6)							3473	6432	4153	4686	
7(P5,P6)							4724	6238	932	3964	
8(P5,P6)							7873	10396	1553	2939	
										2939	MEDEL TOTALT

DÄMPNINGEN ÄR OTILLFREDSSTÄLLANDE I SIDLED!

ALLRA STÖRST BLIR DOCK SAMTLIGA RESPONSER, LODRÄT, I SIDLED OCH I LÅNGSLED, VID LÅNGSGÅENDE EXITATIONER (LÖSA KOPPEL).

	P5H knack 1	P5H knack 2	P5H knack 3	P7C	P7D						
7(P5)	206	52	73							110	
8(P5)	45	21	24							30	
4(P7)				550	900					725	
										70	MEDEL (ej ranger)
1(P5)	39	46	79							55	
3(P5)	24	4	12							13	
4(P5)	23	5	14							14	
8(P5)	119	15	23							52	
2(P7)			lågfrekvent	lågfrekvent						34	
3(P5,P7)			lågfrekvent	lågfrekvent							
2(P5)	43	50	63							52	
5(P5)	261	55	84							133	
1(P7)			lågfrekvent	lågfrekvent						93	
5(P7)			lågfrekvent	lågfrekvent							
7(P7)			lågfrekvent	lågfrekvent							
8(P7)			lågfrekvent	lågfrekvent							

(* Om vi låter x beteckna underlagets läge och y, z och w är lägena för m1, m2 och m3 respektive, har systemet avbildat i avsnittet Accelerationsmätningar följande rörelseekvationer:

$$\begin{aligned}x''[t] &= a \\ m_1 y''[t] &= (m_1 + m_2 + m_3) \mu g + k_1 (z[t] - y[t]) - k_3 (y[t] - w[t]) \\ m_2 z''[t] &= -k_1 (z[t] - y[t]) + k_2 (w[t] - z[t]) \\ m_3 w''[t] &= -k_2 (w[t] - z[t]) + k_3 (y[t] - w[t]),\end{aligned}$$

med begynnelsevillkor:

$$\begin{aligned}x[0] &= 0 \\ y[0] &= 0 \\ z[0] &= 0 \\ w[0] &= 0 \\ x'[0] &= 0 \\ y'[0] &= 0 \\ z'[0] &= 0 \\ w'[0] &= 0.\end{aligned}$$

Skrivs de tre senare ekvationerna i matrisform som

$M \cdot r'' + K \cdot r = V$, med $r = \{y, z, w\}$, blir matriserna:*)

$$M = \{\{m_1, 0, 0\}, \{0, m_2, 0\}, \{0, 0, m_3\}\};$$

$$K = \{\{k_1 + k_3, -k_1, -k_3\}, \{-k_1, k_1 + k_2, -k_2\}, \{-k_3, -k_2, k_2 + k_3\}\};$$

$$V = \{(m_1 + m_2 + m_3) \mu g, 0, 0\};$$

MatrixForm[M]

MatrixForm[K]

MatrixForm[V]

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k_1 + k_3 & -k_1 & -k_3 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_3 & -k_2 & k_2 + k_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} g (m_1 + m_2 + m_3) \mu \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(*Vi transformerar rörelseekvationerna med en matris "tr" genom multiplikation från vänster. Första raden: Summering av alla tre ekvationerna dividerat med summa m. Andra och tredje raden förbereder för variabelbyte till y-z och z-w. Variabelbytet i sig ges nedan.*)"

$$tr = \{\{1, 1, 1\} / (m_1 + m_2 + m_3), \{1 / m_1, -1 / m_2, 0\}, \{0, 1 / m_2, -1 / m_3\}\};$$

MatrixForm[tr]

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3} & \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3} & \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3} \\ \frac{1}{m_1} & -\frac{1}{m_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} & -\frac{1}{m_3} \end{pmatrix}$$

(*Vi byter nu variabler till:

```
p[t_] := (m1*y[t] + m2*z[t] + m3*w[t]) / (m1 + m2 + m3),
q[t_] := y[t] - z[t],
r[t_] := y[t] - w[t] = q + s,
s[t_] := z[t] - w[t].
```

Observera att $r[t]$ kan uttryckas med hjälp av q och s och förekommer därför inte i ekvationerna. Variabelbytet karakteriseras av matrisen "varbyte". Vi behöver även inversen till denna matris, som vi betecknar "inv".

```
varbyte = {{m1 / (m1 + m2 + m3), m2 / (m1 + m2 + m3), m3 / (m1 + m2 + m3)}, {1, -1, 0}, {0, 1, -1}};
```

```
inv = Simplify[Inverse[varbyte]];
```

```
MatrixForm[varbyte]
```

```
MatrixForm[inv]
```

$$\begin{pmatrix} \frac{m1}{m1+m2+m3} & \frac{m2}{m1+m2+m3} & \frac{m3}{m1+m2+m3} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{m2+m3}{m1+m2+m3} & \frac{m3}{m1+m2+m3} \\ 1 & -\frac{m1}{m1+m2+m3} & \frac{m3}{m1+m2+m3} \\ 1 & -\frac{m1}{m1+m2+m3} & -\frac{m1+m2}{m1+m2+m3} \end{pmatrix}$$

(*M.r'+K.r=V, d. v. s. rörelseekvationerna med $r=\{y,z,w\}$ är ekvivalenta med

```
tr.M.inv.varbyte.r'+tr.K.inv.varbyte.r=tr.V,
eftersom tr är ickesingulär.Om vi skriver P={p,q,s} så är
varbyte.r=P,
och ekvationerna får formen:
tr.M.inv.P'+tr.K.inv.P=tr.V*)
```

```
P = {p, q, s};
```

(* De resulterande matriserna respektive lastvektorn får formen:*)

```
MatrixForm[Simplify[tr.M.inv]]
```

```
MatrixForm[Simplify[tr.K.inv]]
```

```
MatrixForm[Simplify[tr.V]]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k3 m2 + k1 (m1 + m2)}{m1 m2} & \frac{k3}{m1} - \frac{k2}{m2} \\ 0 & -\frac{k1}{m2} + \frac{k3}{m3} & \frac{k3 m2 + k2 (m2 + m3)}{m2 m3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} g \mu \\ \frac{g (m1 + m2 + m3)}{m1} \mu \\ 0 \end{pmatrix}$$

(*Kvar finns då två väsentliga ekvationer, då den första av:

$$\{p, q, s\}' + \left\{0, \frac{k_1 (m_1+m_2) q - k_2 m_1 s + k_3 m_2 (q+s)}{m_1 m_2}, \frac{-k_1 m_3 q + k_2 (m_2+m_3) s + k_3 m_2 (q+s)}{m_2 m_3}\right\} = \left\{\mu g, \frac{(m_1+m_2+m_3) \mu + g}{m_1}, 0\right\} \text{ är trivial.}$$

Vi skriver

$$\{q, s\}' + \left\{\frac{k_1 (m_1+m_2) q - k_2 m_1 s + k_3 m_2 (q+s)}{m_1 m_2}, \frac{-k_1 m_3 q + k_2 (m_2+m_3) s + k_3 m_2 (q+s)}{m_2 m_3}\right\} = \left\{\frac{(m_1+m_2+m_3) \mu + g}{m_1}, 0\right\} \text{ som}$$

id. $Q' + ka.Q = v$, där $Q = \{q, s\}$,

$$ka = \left\{\frac{k_1 (m_1+m_2) + k_3 m_2}{m_1 m_2}, \frac{-k_2 m_1 + k_3 m_2}{m_1 m_2}\right\}, \left\{\frac{-k_1 m_3 + k_3 m_2}{m_2 m_3}, \frac{k_2 (m_2+m_3) + k_3 m_2}{m_2 m_3}\right\} \text{ och } v = \left\{\frac{(m_1+m_2+m_3) \mu + g}{m_1}, 0\right\}. \text{ ka är nu systemets karakteristiska matris. *)}$$

$$Q = \{q, s\};$$

$$ka = \left\{\left\{\frac{k_1 (m_1+m_2) + k_3 m_2}{m_1 m_2}, \frac{-k_2 m_1 + k_3 m_2}{m_1 m_2}\right\}, \left\{\frac{-k_1 m_3 + k_3 m_2}{m_2 m_3}, \frac{k_2 (m_2+m_3) + k_3 m_2}{m_2 m_3}\right\}\right\};$$

$$v = \left\{\frac{(m_1+m_2+m_3) \mu + g}{m_1}, 0\right\};$$

(*Vi låter {l1,l2} beteckna egenvärdena till matrisen

ka. Dessa egenvärden är systemets egenvinkelfrekvenser i kvadrat. På

samma sätt låter vi {v1,v2} beteckna egenvektorerna till ka,

d. v. s. modformen (onormaliserad) i variablerna q och s. *)

$$\{\{l1, l2\}, \{v1, v2\}\} = \text{Simplify}[\text{Eigensystem}[ka]]$$

$$\left\{\left\{\frac{1}{2 m_1 m_2 m_3} \left(k_1 m_1 m_3 + k_1 m_2 m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3) - \sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3) + (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2)}\right), \frac{1}{2 m_1 m_2 m_3} \left(k_1 m_1 m_3 + k_1 m_2 m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3) + \sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3) + (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2)}\right)\right\}, \left\{\frac{1}{2 m_1 (k_3 m_2 - k_1 m_3)} \left(k_1 m_1 m_3 + k_1 m_2 m_3 + k_3 m_2 (-m_1 + m_3) - k_2 m_1 (m_2 + m_3) - \sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3) + (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2)}\right), 1\right\}, \left\{\frac{1}{2 m_1 (k_3 m_2 - k_1 m_3)} \left(k_1 m_1 m_3 + k_1 m_2 m_3 + k_3 m_2 (-m_1 + m_3) - k_2 m_1 (m_2 + m_3) + \sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3) + (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2)}\right), 1\right\}\right\}$$

```
(* id.Q''+ka.Q=v har den homogena lösningen
  Qhom=v1*(A1*Sin[√11*t]+B1*Cos[√11*t])+v2*(A2*Sin[√12*t]+B2*Cos[√12*t]),
  där A1, A2, B1, B2, är godtyckliga konstanter,
  d. v. s. oavsett värden på dessa konstanter, blir id.Q''+ka.Q=0,
  Eftersom v är konstant och ka ickesingulär är den partikulära lösningen
  Qpart=Inverse[ka].v.
  Varje lösning till ekvationen kan skrivas som
  Q=Qhom+Qpart, där konstanterna nu bestäms av begynnelsevillkoren.*)

Qhom[t_]:=v1*(A1*Sin[√11]*t+B1*Cos[√11*t])+v2*(A2*Sin[√12*t]+B2*Cos[√12
Qpart=Inverse[ka].v;
FullSimplify[Solve[Qhom[0]+Qpart==0,{B1,B2}]]
FullSimplify[Solve[Qhom'[0]==0,{A1,A2}]]

General::spell1 : Possible spelling error: new symbol name "Qpart" is similar to existing symbol "Apart".

{{B1 -> (g (k3 m2 - k1 m3)
  (k1 (m1 + m2) m3 + k3 m2 (m1 + m3) + k2 m1 (m2 + m3) + √(-4 (k2 k3 + k1 (k2 + k3)) m1 m2
    m3 (m1 + m2 + m3) + (k1 (m1 + m2) m3 + k3 m2 (m1 + m3) + k2 m1 (m2 + m3))^2) μ) /
  (2 (k2 k3 + k1 (k2 + k3)) √(-4 (k2 k3 + k1 (k2 + k3)) m1 m2 m3 (m1 + m2 + m3) +
    (k1 (m1 + m2) m3 + k3 m2 (m1 + m3) + k2 m1 (m2 + m3))^2)),
B2 -> -(g (k3 m2 - k1 m3) (k1 (m1 + m2) m3 + k3 m2 (m1 + m3) + k2 m1 (m2 + m3) -
  √(-4 (k2 k3 + k1 (k2 + k3)) m1 m2 m3 (m1 + m2 + m3) +
    (k1 (m1 + m2) m3 + k3 m2 (m1 + m3) + k2 m1 (m2 + m3))^2) μ) /
  (2 (k2 k3 + k1 (k2 + k3)) √(-4 (k2 k3 + k1 (k2 + k3)) m1 m2 m3 (m1 + m2 + m3) +
    (k1 (m1 + m2) m3 + k3 m2 (m1 + m3) + k2 m1 (m2 + m3))^2))}}

{{A1 -> 0, A2 -> 0}}

(*Vi har således lösningen till tvåekvationssystemet:
  q1[t_]:=v1[[1]]*( (k3 m2-k1 m3)
  (k1 (m1+m2) m3+k3 m2 (m1+m3)+k2 m1 (m2+m3)+√(-4 (k2 k3+k1 (k2+k3)) m1 m2
    m3 (m1+m2+m3)+(k1 (m1+m2) m3+k3 m2 (m1+m3)+k2 m1 (m2+m3))^2) μ*g) /
  (2 (k2 k3+k1 (k2+k3)) √(-4 (k2 k3+k1 (k2+k3)) m1 m2 m3 (m1+m2+m3)+
    (k1 (m1+m2) m3+k3 m2 (m1+m3)+k2 m1 (m2+m3))^2)))*Cos[√11*t]+
  v2[[1]]*( -(k3 m2-k1 m3) (k1 (m1+m2) m3+k3 m2 (m1+m3)+k2 m1 (m2+m3)-
    √(-4 (k2 k3+k1 (k2+k3)) m1 m2 m3 (m1+m2+m3)+
      (k1 (m1+m2) m3+k3 m2 (m1+m3)+k2 m1 (m2+m3))^2) μ*g) /
    (2 (k2 k3+k1 (k2+k3)) √(-4 (k2 k3+k1 (k2+k3)) m1 m2 m3 (m1+m2+m3)+
      (k1 (m1+m2) m3+k3 m2 (m1+m3)+k2 m1 (m2+m3))^2)))*Cos[√12*t]+Qpart[[1]],

  s1[t_]:=v1[[2]]*( (k3 m2-k1 m3)
  (k1 (m1+m2) m3+k3 m2 (m1+m3)+k2 m1 (m2+m3)+√(-4 (k2 k3+k1 (k2+k3)) m1 m2
    m3 (m1+m2+m3)+(k1 (m1+m2) m3+k3 m2 (m1+m3)+k2 m1 (m2+m3))^2) μ*g) /
  (2 (k2 k3+k1 (k2+k3)) √(-4 (k2 k3+k1 (k2+k3)) m1 m2 m3 (m1+m2+m3)+
    (k1 (m1+m2) m3+k3 m2 (m1+m3)+k2 m1 (m2+m3))^2)))*Cos[√11*t]+
  v2[[2]]*( -(k3 m2-k1 m3) (k1 (m1+m2) m3+k3 m2 (m1+m3)+k2 m1 (m2+m3)-
    √(-4 (k2 k3+k1 (k2+k3)) m1 m2 m3 (m1+m2+m3)+
      (k1 (m1+m2) m3+k3 m2 (m1+m3)+k2 m1 (m2+m3))^2) μ*g) /
    (2 (k2 k3+k1 (k2+k3)) √(-4 (k2 k3+k1 (k2+k3)) m1 m2 m3 (m1+m2+m3)+
      (k1 (m1+m2) m3+k3 m2 (m1+m3)+k2 m1 (m2+m3))^2)))*Cos[√12*t]+Qpart[[2]],
```

```

p1 blir på samma sätt p1[t_] := (μ*g*t^2)/2.*

q1[t_] := v1[[1]] *
(( (k3 m2 - k1 m3) (k1 (m1 + m2) m3 + k3 m2 (m1 + m3) + k2 m1 (m2 + m3) + √(-4 (k2 k3 + k1 (k2 + k3)
m2 m3 (m1 + m2 + m3) + (k1 (m1 + m2) m3 + k3 m2 (m1 + m3) + k2 m1 (m2 + m3))^2)) μ * g) /
(2 (k2 k3 + k1 (k2 + k3)) √(-4 (k2 k3 + k1 (k2 + k3)) m1 m2 m3 (m1 + m2 + m3) +
(k1 (m1 + m2) m3 + k3 m2 (m1 + m3) + k2 m1 (m2 + m3))^2)) * Cos[√11 * t] + v2[[1]] *
(- (k3 m2 - k1 m3) (k1 (m1 + m2) m3 + k3 m2 (m1 + m3) + k2 m1 (m2 + m3) - √(-4 (k2 k3 + k1 (k2 + k3)
m1 m2 m3 (m1 + m2 + m3) + (k1 (m1 + m2) m3 + k3 m2 (m1 + m3) + k2 m1 (m2 + m3))^2)) μ *
(2 (k2 k3 + k1 (k2 + k3)) √(-4 (k2 k3 + k1 (k2 + k3)) m1 m2 m3 (m1 + m2 + m3) +
(k1 (m1 + m2) m3 + k3 m2 (m1 + m3) + k2 m1 (m2 + m3))^2)) * Cos[√12 * t] + Qpart[[1]]

s1[t_] := v1[[2]] *
(( (k3 m2 - k1 m3) (k1 (m1 + m2) m3 + k3 m2 (m1 + m3) + k2 m1 (m2 + m3) + √(-4 (k2 k3 + k1 (k2 + k3)
m2 m3 (m1 + m2 + m3) + (k1 (m1 + m2) m3 + k3 m2 (m1 + m3) + k2 m1 (m2 + m3))^2)) μ * g) /
(2 (k2 k3 + k1 (k2 + k3)) √(-4 (k2 k3 + k1 (k2 + k3)) m1 m2 m3 (m1 + m2 + m3) +
(k1 (m1 + m2) m3 + k3 m2 (m1 + m3) + k2 m1 (m2 + m3))^2)) * Cos[√11 * t] + v2[[2]] *
(- (k3 m2 - k1 m3) (k1 (m1 + m2) m3 + k3 m2 (m1 + m3) + k2 m1 (m2 + m3) - √(-4 (k2 k3 + k1 (k2 + k3)
m1 m2 m3 (m1 + m2 + m3) + (k1 (m1 + m2) m3 + k3 m2 (m1 + m3) + k2 m1 (m2 + m3))^2)) μ *
(2 (k2 k3 + k1 (k2 + k3)) √(-4 (k2 k3 + k1 (k2 + k3)) m1 m2 m3 (m1 + m2 + m3) +
(k1 (m1 + m2) m3 + k3 m2 (m1 + m3) + k2 m1 (m2 + m3))^2)) * Cos[√12 * t] + Qpart[[2]]

p1[t_] := (μ * g * t^2) / 2

(*Vi får tillbaka de ursprungliga koordinaterna,
genom att multiplicera med matrisen "inv": {y,z,w}=
inv.{p,q,s}. Uttrycken blir rätt stora, så vi skriver inte ut dem. *)

X1[t_] = inv.{p1[t], q1[t], s1[t]};
y1[t_] := X1[t][[1]]
z1[t_] := X1[t][[2]]
w1[t_] := X1[t][[3]]
(*För att beräkna de maximala amplituderna i de olika accelerationsförloppen,
beräknas först koefficienterna för de harmoniska funktionerna. *)
α1y = FullSimplify[Coefficient[y1'[t], Cos[t * √11]]];
α2y = FullSimplify[Coefficient[y1'[t], Cos[t * √12]]];
α1z = FullSimplify[Coefficient[z1'[t], Cos[t * √11]]];
α2z = FullSimplify[Coefficient[z1'[t], Cos[t * √12]]];
α1w = FullSimplify[Coefficient[w1'[t], Cos[t * √11]]];
α2w = FullSimplify[Coefficient[w1'[t], Cos[t * √12]]];
(*De maximala amplituderna är summan av beloppen av 1- och 2-amplituderna,
i praktiken oftast skillnadsamplituden. *)

FullSimplify[α1y + α2y]
FullSimplify[α1y - α2y]
FullSimplify[α1z + α2z]
FullSimplify[α1z - α2z]
FullSimplify[α1w + α2w]
FullSimplify[α1w - α2w]

```

General::spell1 : Possible spelling error: new symbol name "α1z" is similar to existing symbol "α1y".

General::spell1 : Possible spelling error: new symbol name "α2z" is similar to existing symbol "α2y".

General::spell : Possible spelling error: new symbol name "α1w" is similar to existing symbols {α1y, α1z}.

General::spell : Possible spelling error: new symbol name "α2w" is similar to existing symbols {α2y, α2z}.

$$\frac{g (m_2 + m_3) \mu}{m_1}$$

$$\left(g (k_3 m_1 m_2^2 - (k_1 + k_3) m_2 (m_1 + m_2) m_3 + (k_1 m_1 - (k_1 + k_3) m_2) m_3^2 + k_2 m_1 (m_2 + m_3)^2) \mu \right) /$$

$$\left(m_1 \sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3) + (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2)} \right)$$

$$-g \mu$$

$$- \left(g (k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3) - k_1 m_3 (m_1 + m_2 + 2 m_3)) \mu \right) /$$

$$\left(\sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3) + (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2)} \right)$$

$$-g \mu$$

$$- \left(g (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_2 m_1 (m_2 + m_3) - k_3 m_2 (m_1 + 2 m_2 + m_3)) \mu \right) /$$

$$\left(\sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3) + (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2)} \right)$$

(* Ovan har vi beräknat svaret på en konstant acceleration av underlaget. Normalt utsätts dock underlaget för en accelerationspuls av ändlig varaktighet. Om accelerationspulsen upphör vid tiden T, fås därefter en fri svängning:

$$Q2[t_ , T_] := v1 * (A21[T_] * Sin[\sqrt{l1} * (t - T_)] + B21[T_] * Cos[\sqrt{l1} * (t - T_)]) +$$

$$v2 * (A22[T_] * Sin[\sqrt{l2} * (t - T_)] + B22[T_] * Cos[\sqrt{l2} * (t - T_)]),$$

där {C1,C2,D1,D2} bestäms av q1[T] och s1[T].*)

$$\text{Solve}[v1 * B21[T] + v2 * B22[T] == \{q1[T], s1[T]\}, \{B21[T], B22[T]\}];$$

$$\text{Solve}[v1 * A21[T] * \sqrt{l1} + v2 * A22[T] * \sqrt{l2} == \{q1'[T], s1'[T]\}, \{A21[T], A22[T]\}];$$

$$B21[T_] := - \frac{g (m_1 + m_2 + m_3) (k_3 m_2 - k_1 m_3) \mu}{m_1 m_2 \left(\frac{k_1 k_2}{m_1 m_2} + \frac{k_1 k_3}{m_1 m_2} + \frac{k_2 k_3}{m_1 m_2} + \frac{k_1 k_2}{m_1 m_3} + \frac{k_1 k_3}{m_1 m_3} + \frac{k_2 k_3}{m_1 m_3} + \frac{k_1 k_2}{m_2 m_3} + \frac{k_1 k_3}{m_2 m_3} + \frac{k_2 k_3}{m_2 m_3} \right) m_3} +$$

$$\left(g (k_3 m_2 - k_1 m_3) (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3) + \sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3) + (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2)} \right)$$

$$\mu \cos \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\left(\frac{1}{m_1 m_2 m_3} (k_1 m_1 m_3 + k_1 m_2 m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3) - \sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3) + (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2)} \right) T} \right) \right] \right) /$$

$$\left(2 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) \sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3) + (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2)} \right) -$$

$$\left(g (k_3 m_2 - k_1 m_3) (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3) - \sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3) + (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2)} \right)$$

$$\mu \cos \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\left(\frac{1}{m_1 m_2 m_3} (k_1 m_1 m_3 + k_1 m_2 m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3) + \sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3) + (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2)} \right) T} \right) \right] \right)$$

$$\begin{aligned}
& \left. \left(\frac{m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3) + (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2}{\sqrt{2}} \right) \right) \mu \\
& \cos \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\left(\frac{1}{m_1 m_2 m_3} (k_1 m_1 m_3 + k_1 m_2 m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3) + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3) + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2 \right) \right) T \right] \right) \Bigg] \Bigg/ \\
& \left(4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 \sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3) + \right.} \\
& \quad \left. (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2) \right) - \\
& \frac{1}{2 m_1 (k_3 m_2 - k_1 m_3)} \left((k_1 m_1 m_3 + k_1 m_2 m_3 + k_3 m_2 (-m_1 + m_3) - k_2 m_1 (m_2 + m_3) - \right. \\
& \quad \left. \sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3) + \right.} \\
& \quad \left. (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2) \right) \\
& \left(\frac{g (m_1 + m_2 + m_3) (k_3 m_2 - k_1 m_3) \mu}{m_1 m_2 \left(\frac{k_1 k_2}{m_1 m_2} + \frac{k_1 k_3}{m_1 m_2} + \frac{k_2 k_3}{m_1 m_2} + \frac{k_1 k_2}{m_1 m_3} + \frac{k_1 k_3}{m_1 m_3} + \frac{k_2 k_3}{m_1 m_3} + \frac{k_1 k_2}{m_2 m_3} + \frac{k_1 k_3}{m_2 m_3} + \frac{k_2 k_3}{m_2 m_3} \right) m_3} - \right. \\
& \quad \left(g (k_3 m_2 - k_1 m_3) (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3) + \right. \\
& \quad \left. \sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3) + \right.} \\
& \quad \left. (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2) \right) \mu \cos \left[\right. \\
& \quad \left. \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\left(\frac{1}{m_1 m_2 m_3} (k_1 m_1 m_3 + k_1 m_2 m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3) - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3) + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2 \right) \right) T \right] \right) \Bigg] \Bigg] \Bigg/ \\
& \left(2 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) \sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3) + \right.} \\
& \quad \left. (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2) \right) + \\
& \left(g (k_3 m_2 - k_1 m_3) (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3) - \right. \\
& \quad \left. \sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3) + \right.} \\
& \quad \left. (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2) \right) \mu \cos \left[\right. \\
& \quad \left. \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\left(\frac{1}{m_1 m_2 m_3} (k_1 m_1 m_3 + k_1 m_2 m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3) + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3) + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2 \right) \right) T \right] \right) \Bigg] \Bigg] \Bigg/ \\
& \left(2 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) \sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3) + \right.} \\
& \quad \left. (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2) \right) \Bigg] \Bigg] \Bigg] \Bigg/ \\
& \left(\sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3) + (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + \right.} \\
& \quad \left. k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2) \right) \\
\mathbf{A21}[\mathbf{T}_-] := & - \sqrt{2} \left(\left(g (k_3 m_2 - k_1 m_3) \sqrt{\left(\frac{1}{m_1 m_2 m_3} (k_1 m_1 m_3 + k_1 m_2 m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. k_2 m_1 (m_2 + m_3) - \sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3) + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2 \right) \right) \right) \right) \\
& \left(k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3) + \sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3))} \right. \\
& \quad \left. m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3) + (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2) \right) \Bigg)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sin \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\left(\frac{1}{m_1 m_2 m_3} (k_1 m_1 m_3 + k_1 m_2 m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3) - \right. \right.} \right. \\
& \quad \left. \left. \sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2) \right) \right) \mathbf{T} \right] \Bigg) / \\
& (2 \sqrt{2} (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) \sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3) + \\
& \quad (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2) - \\
& \left(g (k_3 m_2 - k_1 m_3) (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3) - \right. \\
& \quad \left. \sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3) + \right. \\
& \quad \left. (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2) \right) \\
& \sqrt{\left(\frac{1}{m_1 m_2 m_3} (k_1 m_1 m_3 + k_1 m_2 m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3) + \right. \\
& \quad \left. \sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3) + \right. \\
& \quad \left. (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2) \right) \Bigg) \mu \\
& \sin \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\left(\frac{1}{m_1 m_2 m_3} (k_1 m_1 m_3 + k_1 m_2 m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3) + \right. \right.} \right. \\
& \quad \left. \left. \sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2) \right) \right) \mathbf{T} \right] \Bigg) / \\
& (2 \sqrt{2} (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) \sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3) + \\
& \quad (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2) \Bigg) \Bigg) / \\
& \left(\sqrt{\left(\frac{1}{m_1 m_2 m_3} (k_1 m_1 m_3 + k_1 m_2 m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3) - \right. \right.} \right. \\
& \quad \left. \left. \sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2) \right) \right) \Bigg) + \\
& \left(2 m_1 (k_3 m_2 - k_1 m_3) \sqrt{\left(\frac{1}{m_1 m_2 m_3} (k_1 m_1 m_3 + k_1 m_2 m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3) + \right. \right.} \right. \\
& \quad \left. \left. \sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2) \right) \right) \Bigg) \\
& \left(-\frac{1}{2 \sqrt{2} m_1 (k_3 m_2 - k_1 m_3)} \left((k_1 m_1 m_3 + k_1 m_2 m_3 + k_3 m_2 (-m_1 + m_3) - k_2 m_1 (m_2 + m_3) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2) \right) \sqrt{\left(\frac{1}{m_1 m_2 m_3} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (k_1 m_1 m_3 + k_1 m_2 m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3) - \sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) \right. \right.} \right. \\
& \quad \left. \left. m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3) + (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3)) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left(\left(g (k_3 m_2 - k_1 m_3) \sqrt{\left(\frac{1}{m_1 m_2 m_3} (k_1 m_1 m_3 + k_1 m_2 m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + \right. \right.} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. k_2 m_1 (m_2 + m_3) - \sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3) + \right. \right.} \right. \\
& \quad \left. \left. (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2) \right) \right) \right) \\
& \quad \left. (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3) + \sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3) + (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3)) \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mu \sin \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\left(\frac{1}{m_1 m_2 m_3} (k_1 m_1 m_3 + k_1 m_2 m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. k_2 m_1 (m_2 + m_3) - \sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3) + \right. \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2 \right) \right) T} \right] \right) / \\
& \left(2 \sqrt{2} (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) \sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 m_2 m_3 \right. \\
& \quad \left. (m_1 + m_2 + m_3) + (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2) \right) - \\
& \left(g (k_3 m_2 - k_1 m_3) (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3) - \right. \\
& \quad \left. \sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3) + \right. \\
& \quad \left. (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2) \right) \sqrt{\left(\frac{1}{m_1 m_2 m_3} (k_1 m_1 m_3 + \right. \\
& \quad \left. k_1 m_2 m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3) + \sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 m_2 m_3 \right. \\
& \quad \left. (m_1 + m_2 + m_3) + (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2) \right) T} \right) \right) / \\
& \left(2 \sqrt{2} (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) \sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 m_2 m_3 \right. \\
& \quad \left. (m_1 + m_2 + m_3) + (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2) \right) \right) \Bigg) + \\
& \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\left(\frac{1}{m_1 m_2 m_3} (k_1 m_1 m_3 + k_1 m_2 m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2) \right) \right) \Bigg) \\
& \left(\left(g (k_1 m_1 m_3 + k_1 m_2 m_3 + k_3 m_2 (-m_1 + m_3) - k_2 m_1 (m_2 + m_3) - \sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3) + (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2) \right) \right. \\
& \quad \left. \sqrt{\left(\frac{1}{m_1 m_2 m_3} (k_1 m_1 m_3 + k_1 m_2 m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2) \right) \right) (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + \right. \\
& \quad \left. k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3) + \sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 m_2 m_3 \right. \\
& \quad \left. (m_1 + m_2 + m_3) + (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2) \right) \mu S. \\
& \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\left(\frac{1}{m_1 m_2 m_3} (k_1 m_1 m_3 + k_1 m_2 m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2) \right) T} \right) \right) \Bigg) / \\
& \left(4 \sqrt{2} (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 \sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 m_2 m_3 \right. \\
& \quad \left. (m_1 + m_2 + m_3) + (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2) \right) - \\
& \left(g (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3) - \sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) \right. \\
& \quad \left. m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3) + (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3) + \sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3))} \right. \\
& \quad \left. m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3) + (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3) \right. \\
& \quad \left. \mu \sin \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\left(\frac{1}{m_1 m_2 m_3} (k_1 m_1 m_3 + k_1 m_2 m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + \right. \right. \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. k_2 m_1 (m_2 + m_3) - \sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3))} m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3) + \right. \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2 \right) \right) \right] \right) \right) / \\
& \left(2 \sqrt{2} (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) \sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 m_2 m_3} \right. \\
& \quad \left. (m_1 + m_2 + m_3) + (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2 \right) - \\
& \left(g (k_3 m_2 - k_1 m_3) (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3) - \right. \\
& \quad \left. \sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3) + \right. \\
& \quad \left. (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2} \right) \\
& \quad \left. \sqrt{\left(\frac{1}{m_1 m_2 m_3} (k_1 m_1 m_3 + k_1 m_2 m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3) + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3) + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2 \right) \right) \right) \mu \\
& \sin \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\left(\frac{1}{m_1 m_2 m_3} (k_1 m_1 m_3 + k_1 m_2 m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1} \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (m_2 + m_3) + \sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3) + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2 \right) \right) \right] \right) \right) / \\
& \left(2 \sqrt{2} (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) \sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 m_2 m_3} \right. \\
& \quad \left. (m_1 + m_2 + m_3) + (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2 \right) \right) \right) + \\
& \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\left(\frac{1}{m_1 m_2 m_3} (k_1 m_1 m_3 + k_1 m_2 m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3) - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3) + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2 \right) \right) \right) \\
& \left(\left(g (k_1 m_1 m_3 + k_1 m_2 m_3 + k_3 m_2 (-m_1 + m_3) - k_2 m_1 (m_2 + m_3) - \sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3))} \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3) + (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3) \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \sqrt{\left(\frac{1}{m_1 m_2 m_3} (k_1 m_1 m_3 + k_1 m_2 m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3) - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3) + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2 \right) \right) \right) (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + \\
& \quad k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3) + \sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 m_2 m_3} \\
& \quad (m_1 + m_2 + m_3) + (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2 \right) \mu S \\
& \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\left(\frac{1}{m_1 m_2 m_3} (k_1 m_1 m_3 + k_1 m_2 m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3) - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3) + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2 \right) \right) \right) \right) / \\
& \left(4 \sqrt{2} (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 \sqrt{(-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 m_2 m_3} \right. \\
& \quad \left. (m_1 + m_2 + m_3) + (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2 \right) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(g \left(k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3) - \sqrt{-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3))} \right. \right. \\
& \quad m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3) + (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3) \\
& \quad (k_1 m_1 m_3 + k_1 m_2 m_3 + k_3 m_2 (-m_1 + m_3) - k_2 m_1 (m_2 + m_3) + \sqrt{-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3))} \\
& \quad m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3) + (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3) \\
& \quad \left. \sqrt{\left(\frac{1}{m_1 m_2 m_3} (k_1 m_1 m_3 + k_1 m_2 m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \sqrt{-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3))} m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2 \right) \right) \mu \sin \left[\right. \\
& \quad \left. \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\left(\frac{1}{m_1 m_2 m_3} (k_1 m_1 m_3 + k_1 m_2 m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3) + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \sqrt{-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3))} m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2 \right) \right) \right] \right) \Bigg] \Bigg) / \\
& \quad \left(4 \sqrt{2} (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 \sqrt{-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 m_2 m_3} \right. \\
& \quad \left. (m_1 + m_2 + m_3) + (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2 \right) \Bigg) \Bigg) \Bigg) \Bigg) / \\
& \quad \left(\sqrt{-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3) + (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + \right. \\
& \quad \left. k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2} \right) \\
& \quad \sqrt{\left(\frac{k_2 m_1 m_2 + k_3 m_1 m_2 + k_1 m_1 m_3 + k_2 m_1 m_3 + k_1 m_2 m_3 + k_3 m_2 m_3}{m_1 m_2 m_3} - \right. \\
& \quad \frac{1}{m_1 m_2 m_3} \\
& \quad \left. \left(\sqrt{-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2 \right) \right) \Bigg) \Bigg) \\
& \quad \sqrt{\left(\frac{k_2 m_1 m_2 + k_3 m_1 m_2 + k_1 m_1 m_3 + k_2 m_1 m_3 + k_1 m_2 m_3 + k_3 m_2 m_3}{m_1 m_2 m_3} + \right. \\
& \quad \frac{1}{m_1 m_2 m_3} \\
& \quad \left. \left(\sqrt{-4 (k_2 k_3 + k_1 (k_2 + k_3)) m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (k_1 (m_1 + m_2) m_3 + k_3 m_2 (m_1 + m_3) + k_2 m_1 (m_2 + m_3))^2 \right) \right) \Bigg) \Bigg) \Bigg) \Bigg) \\
\end{aligned}$$

$Q2[t_ , T_] := (v1 * (A21[T] * \sin[\sqrt{11} * (t - T)] + B21[T] * \cos[\sqrt{11} * (t - T)]) +$
 $v2 * (A22[T] * \sin[\sqrt{12} * (t - T)] + B22[T] * \cos[\sqrt{12} * (t - T)]))$
 (*Nu transformerar vi hela uttrycket tillbaka till y,
 z och w. Eftersom den totala lösningen beror på accelerationspulsens längd,
 T, beror nu koordinaterna av bägge dessa variabler (t. ex. y=y[t,T]).*)
 $p2[t_ , T_] := p1[T] + p1'[T] * (t - T)$
 $q2[t_ , T_] := Q2[t, T][[1]]$
 $s2[t_ , T_] := Q2[t, T][[2]]$
 $x2[t_ , T_] := \text{inv.}\{p2[t, T], q2[t, T], s2[t, T]\}$

```

(*För att få snabbareberäkningstider
  inför vi nu numeriska värden. (Kan göras från början,
    om det endast är en uppsättning parametrar man är intresserad av.)
  Vi kan välja vilka värden vi vill på massor och styvheter,
  och också åskådliggöra svängningens tidsförlopp. I
  kapitlet "Accelerationsmätningar" användes:*)
m1 = 3000;
m2 = 900;
m3 = 14500;
k1 = 45000000;
k2 = 63000000;
k3 = 271000000;
(* Systemet har då egenfrekvenserna (i Hz)*)
N[{ $\sqrt{11} / (2 * \text{Pi})$ ,  $\sqrt{12} / (2 * \text{Pi})$ }]
(*Accelerationerna beräknas enligt nedan.*/)
acc1y[t_, T_] := y1'[t]
acc2y[t_, T_] = N[Simplify[D[X2[t, T][[1]], {t, 2}]]];
acc1z[t_, T_] := z1'[t]
acc2z[t_, T_] = N[Simplify[D[X2[t, T][[2]], {t, 2}]]];
acc1w[t_, T_] := w1'[t]
acc2w[t_, T_] = N[Simplify[D[X2[t, T][[3]], {t, 2}]]];
accy[t_, T_] := acc1y[t, T] /; t ≤ T
accy[t_, T_] := acc2y[t, T] /; t > T
accz[t_, T_] := acc1z[t, T] /; t ≤ T
accz[t_, T_] := acc2z[t, T] /; t > T
accw[t_, T_] := acc1w[t, T] /; t ≤ T
accw[t_, T_] := acc2w[t, T] /; t > T

{51.7971, 60.0691}

General::spell1 : Possible spelling error: new symbol name "acc1z" is similar to existing symbol "acc1y".

General::spell1 : Possible spelling error: new symbol name "acc2z" is similar to existing symbol "acc2y".

General::spell :
  Possible spelling error: new symbol name "acc1w" is similar to existing symbols {acc1y, acc1z}.

General::spell :
  Possible spelling error: new symbol name "acc2w" is similar to existing symbols {acc2y, acc2z}.

General::spell :
  Possible spelling error: new symbol name "accy" is similar to existing symbols {acc1y, acc2y}.

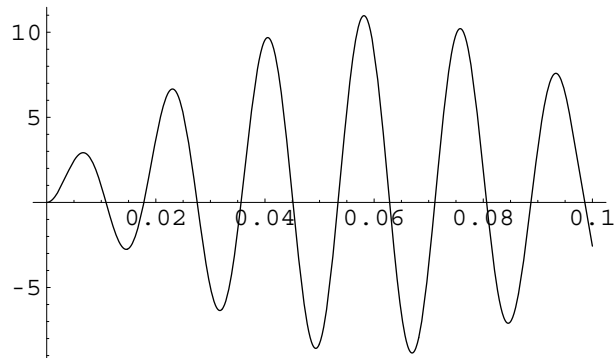
General::spell :
  Possible spelling error: new symbol name "accz" is similar to existing symbols {acc1z, acc2z, accy}.

General::spell :
  Possible spelling error: new symbol name "accw" is similar to existing symbols {acc1w, acc2w, accy, accz}.

```

(*Med acceleration, som ej upphör,
blir tidsförloppet för m_2 's rörelse de första 0,1 sek:*)

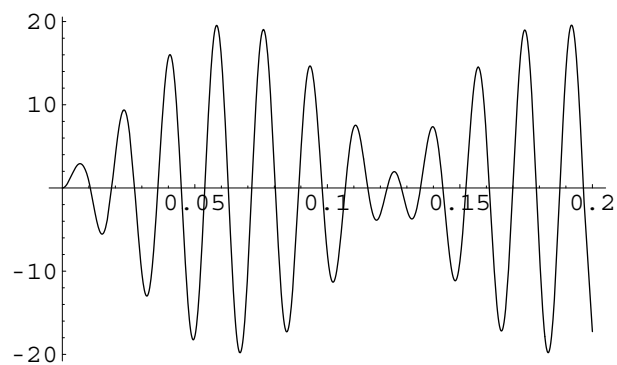
`Plot[z1''[t] / ( $\mu * g$ ), {t, 0, 0.1}]`



- Graphics -

(*Om accelerationspulsen upphör snabbt, fås ett ännu kraftigare svar:*)

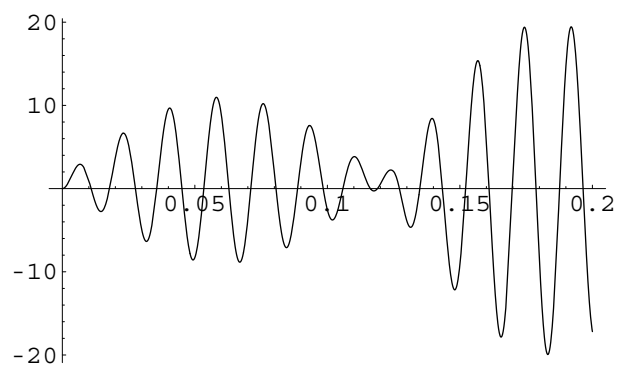
`Plot[accz[t, 0.009] / ( $\mu * g$ ), {t, 0, 0.2}]`



- Graphics -

(*Om accelerationspulsen upphör långsammare, fås kanske ett ännu kraftigare svar:*)

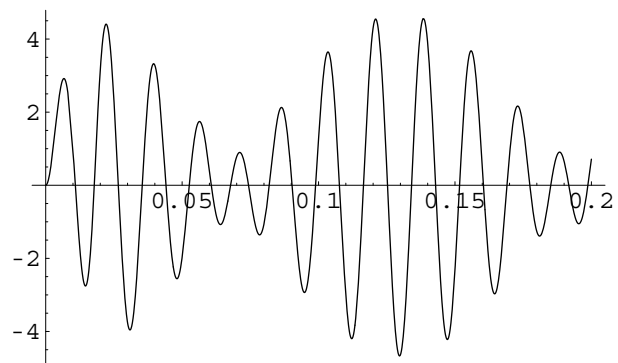
`Plot[accz[t, 0.125] / ( $\mu * g$ ), {t, 0, 0.2}]`



- Graphics -

(*Om accelerationspulsen upphör vid andra tider,
fås oftast ett mindre kraftigt svar:*)

```
Plot[accz[t, 0.018] / ( $\mu$  * g), {t, 0, 0.2}]
```



- Graphics -

Mekaniska Vibrationer

Rörelseekvationerna för en deformierbar kropp Ω med densitet $\rho(r)$ och kroppskraftvektor b är

$$\rho \ddot{r} = \partial \cdot \sigma + b \quad \text{i } \Omega \quad (0.1)$$

$$\sigma = \sigma(d, \dot{d}, t) \quad \text{i } \Omega \quad (0.2)$$

$$\sigma = \sigma_R \quad \text{på } \partial\Omega_f \quad (0.3)$$

$$r = r_R \quad \text{på } \partial\Omega_t \quad (0.4)$$

$$\begin{cases} r = r_0 \\ \dot{r} = \dot{r}_0 \end{cases} \quad \text{för } t = 0 \quad (0.5),$$

där (0.6) är Newtons lag på lokal form (med enbart lokal växelverkan), med spänningen $\sigma(d, \dot{d}, t)$ beroende av den lokala deformationstensors d , dess tidsderivata $\dot{d}$ samt möjligen tid explicit. Randvillkoren (0.7), (0.8) uttrycker att spänningen är föreskriven på en del av randen, $\partial\Omega_f$, och läget på en annan del, $\partial\Omega_t$.

$\partial\Omega_f + \partial\Omega_t = \partial\Omega$, men endera mängden kan vara tom. Ekvation (0.5) uttrycker begynnelsevillkor.

I Cartesiska koordinater hänförliga till ett inertialsystem kan en kroppspunkts läge anges med en Ortsvektor r och, om jämviktsläget betecknas med r_e , förskjutningen med

$u(r_e, t) = r(r_e, t) - r_e$. Den Cartesiska deformationstensors komponenter kan uttryckas med de partiella derivatorna av u : $d_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j})$.

Ett linjärt elastiskt konstitutivt samband kan skrivas $\sigma = c \cdot d$, där c är en bisymmetrisk 4:e ordningens negativt definit (över symmetriska 2:a ordningens tensorer) tensor ($c_{((i,j),(k,l))}$). För en kropp bestående av linjärt elastiskt material utan dämpning blir (0.1) lineariserad (små svängningar) en vågutbredningsekvation för förskjutningsvektorn:

$$\rho \ddot{u}_i = \partial_j c_{ijkl} \partial_l u_k + b_i.$$

Skiljes den del ut som härrör från yttre krafter erhålles i operatorform

$$\rho \ddot{u} = \left(-\vec{\partial} \cdot c \cdot \vec{\partial} \right) u + Ru + b \quad (0.6)$$

där operatoren R definieras via sin bilieära form: $\iiint_{\Omega} v \cdot R u dV = \iint_{\partial\Omega_f} v \cdot c \cdot \partial u \cdot dS$, d. v. s.

ytintegralen av randens förskjutning skalärmultipliserat med de applicerade krafterna.

Operatoren $\vec{\partial} \cdot c \cdot \vec{\partial}$ är formellt självadjungerad och, med domän D bestående av L^2 vektorfält över Ω uppfyllande randvillkoren med $\sigma_F = 0$, har den en Friedrich-utvidgning till en väsentligen självadjungerad positiv operator. Operators spektrum är därmed diskret, positivt definit och i avsaknad av andra ackumulationspunkter än oändligheten. Om vi betecknar spektralpunkterna ω_k^2 kallas lösningarna $\Phi_k \in D$ till ekvationerna

$$\left(\vec{\partial} \cdot c \cdot \vec{\partial} \right) \Phi_k = \omega_k^2 \rho \Phi_k$$

egenfunktioner eller, i vibrationssammanhang, moder. (Man bör observera att endast triviala geometrier för kroppar med homogena egenskaper tillåter analytiska lösningar. Erfarenheten visar också att endast de lägre moderna med tillhörande egenfrekvenser kan reproduceras med approximativa metoder såsom FEM.)

Med hänvisning till operators egenskaper är moderna täta i funktionsrummet och parvis L^2 ortogonala m. a. p. $dm = \rho dV$:

$$\iiint_{\Omega} \Phi_k \cdot \Phi_l dm = 0 \text{ för } k \neq l$$

$$\iiint_{\Omega} \Phi_k \cdot \Phi_k dm = N_k \text{ där } N_k \text{ är en godtycklig normeringskonstant.}$$

Tätheten kan utnyttjas för att visa att $\exists q_k : u \in D \Rightarrow u = \sum_k q_k \Phi_k$

Då modekvationen är linjär, är även $\alpha \Phi_k$ en lösning, då Φ_k är det. Det betyder att q_k och Φ_k tagna var för sig är rent matematiska storheter, som kan ha vilka dimensioner som helst, så länge produkten har dimensionen längd. Den fysikaliska storheten är $u = \sum_k q_k \Phi_k$. Moden Φ_k betraktad som operator på L^2 -rummet projicerar på ett linjärt underrum.

Multiplikeras ekv. (0.6) punktvis skalärt med Φ_k samtidigt som $u = \sum_k q_k \Phi_k$ utnyttjas

erhålls efter integrering över kroppen

$$\iiint_{\Omega} \rho \sum_l \ddot{q}_l \Phi_l \cdot \Phi_k dV = - \iiint_{\Omega} \sum_l \omega_l^2 \rho q_l \Phi_l \cdot \Phi_k dV + \iint_{\partial\Omega_f} \Phi_k \cdot \sigma_R \cdot dS + \iiint_{\Omega} b \cdot \Phi_k dV$$

Ortogonalitetsekvationerna ger då

$$N_k (\ddot{q}_k + \omega_k^2 q_k) = \iint_{\partial\Omega} \Phi_k \cdot \sigma_f \cdot dS + \iiint_{\Omega} b \cdot \Phi_k dV,$$

vars reella lösning är

$$q_k(t) = q_k(0) \cos(\omega_k t) + \frac{1}{\omega_k} \dot{q}_k(0) \sin(\omega_k t) + \frac{1}{N_k \omega_k} \int_0^t \left(\iint_{\partial\Omega_f} \Phi_k(r) \cdot \sigma_R(r, \tau) \cdot dS + \iiint_{\Omega} b(r, \tau) \cdot \Phi_k(r) dV \right) \sin \omega_k(t - \tau) d\tau$$

(Om $\sigma_R(r, \tau)$ och/eller $b(r, \tau)$ innehåller konstanta delar, inlemmas dessa lämpligen

redan i definitionen av r_e .) Den fullständiga fysikaliska lösningen till

svängningsproblemet blir då

$$u(r_e, t) = \sum_k \frac{\Phi_k(r_e)}{N_k} \left(\left(\iiint_{\Omega} u(r, 0) \cdot \Phi_k(r) \rho(r) dV(r) \right) \cos(\omega_k t) + \frac{1}{\omega_k} \left(\iiint_{\Omega} \dot{u}(r, 0) \cdot \Phi_k(r) \rho(r) dV(r) \right) \sin(\omega_k t) \right) + \sum_k \frac{\Phi_k(r_e)}{N_k} \left(\frac{1}{\omega_k} \int_0^t \left(\iint_{\partial\Omega_f} \Phi_k(r) \cdot \sigma_R(r, \tau) \cdot dS + \iiint_{\Omega} b(r, \tau) \cdot \Phi_k(r) dV(r) \right) \sin \omega_k(t - \tau) d\tau \right)$$

Observera att ovanstående lösning är mer ett verktyg för tolkning och analys än en

praktiskt användbar lösning. Det är exempelvis uppenbart att Fourieranalys är ett

användbart instrument, då vibrationer skall studeras och att modtolkningen därmed

kan ges en fysikalisk förankring.

Den kinetiska energin i systemet blir

$$\iiint_{\Omega} \frac{1}{2} \dot{u} \cdot \dot{u} dm = \sum_k \frac{1}{2} N_k \dot{q}_k^2,$$

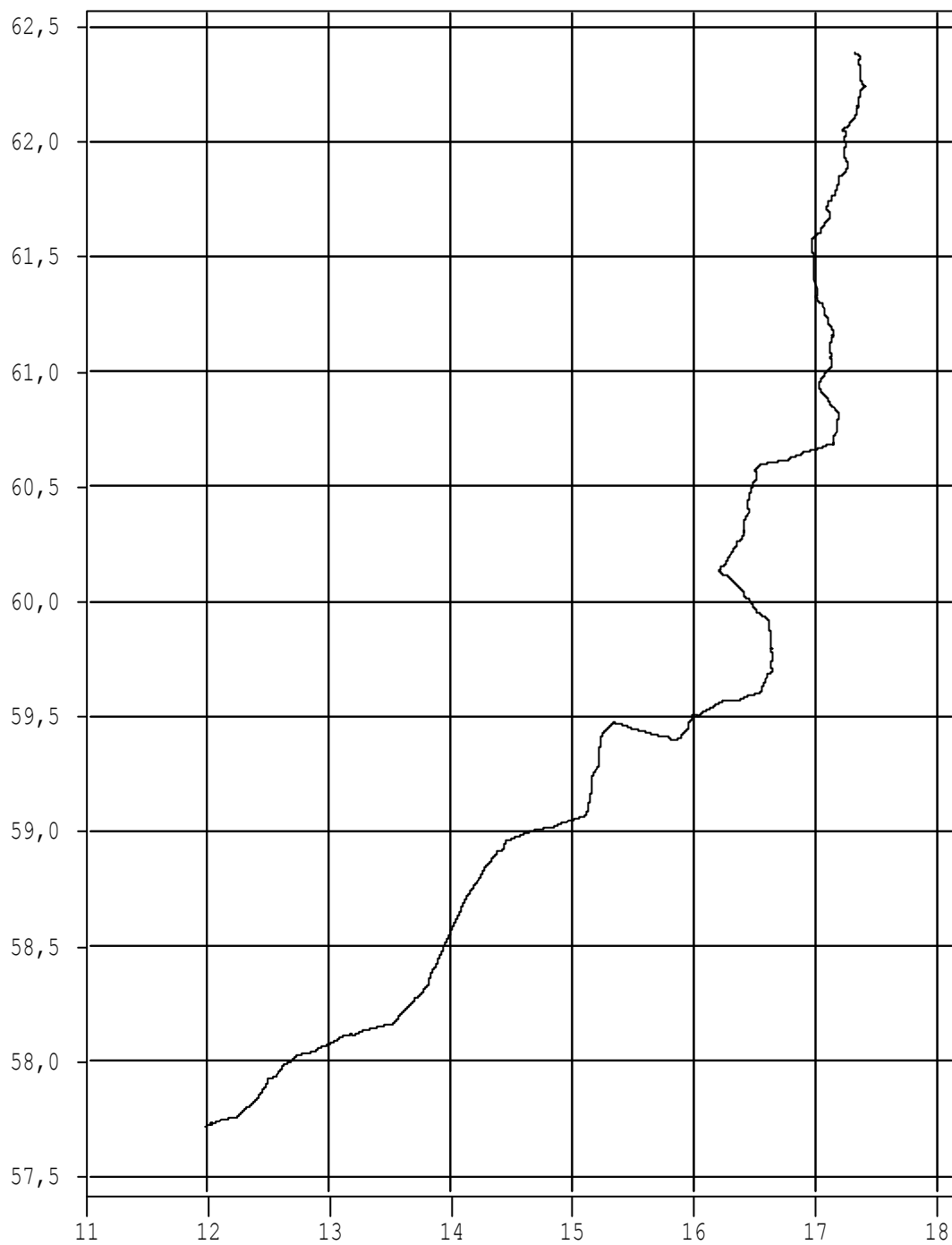
vilket har motiverat beteckningen modmassa för N_k . (Om Φ_k väljs dimensionslös, får

q_k dimensionen längd och N_k dimensionen massa.).

Det bör observeras att ett system som en järnvägsvagn innehåller flera stela

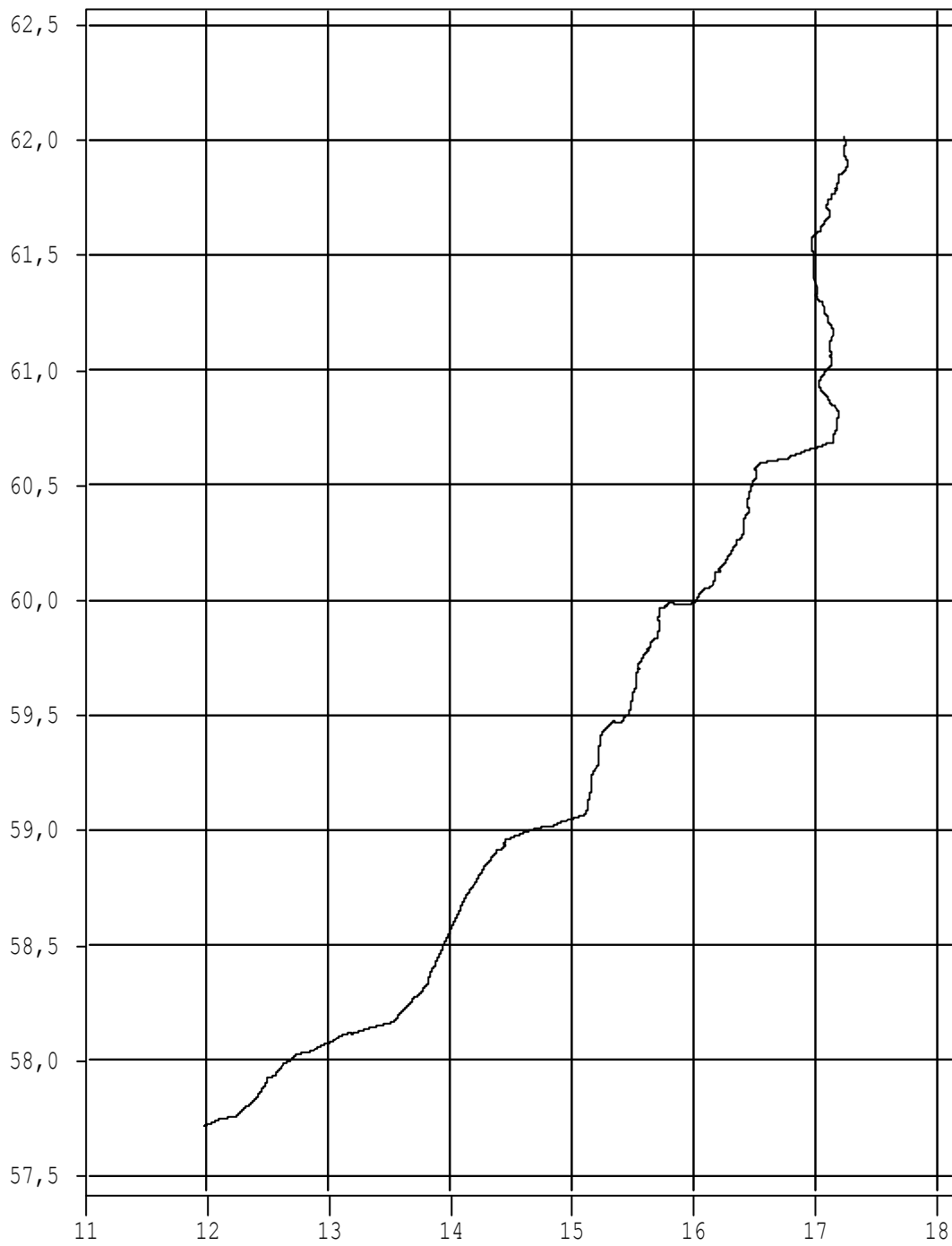
kroppar, kopplade till varandra med bultning, gångjärn, fjädrar eller annan kontakt.

Plott av positioner Prov



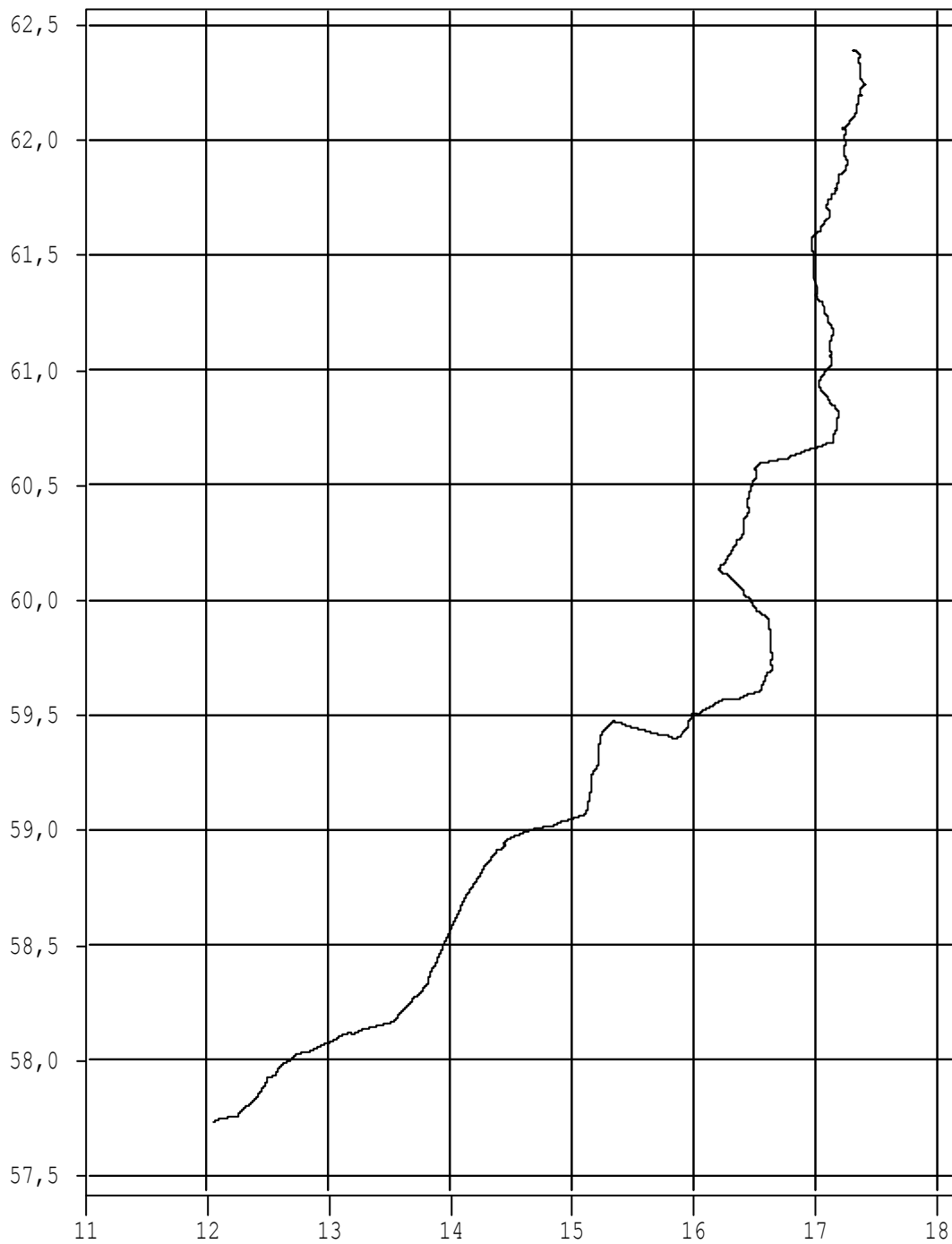
utv02s.dsb

Plott av positioner Prov 2



utv02s.dsb

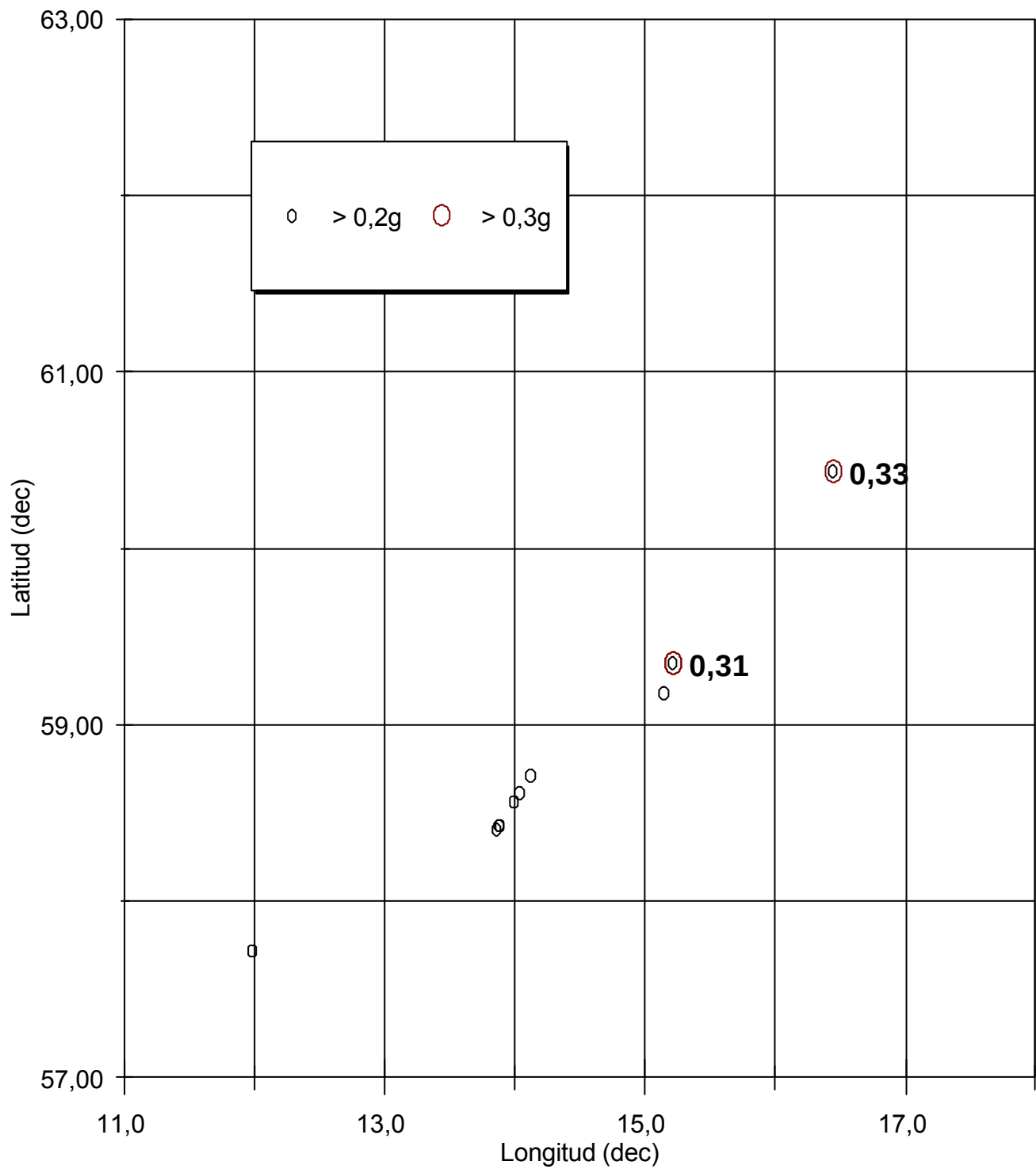
Plott av positioner Prov 4



utv02s.dsb

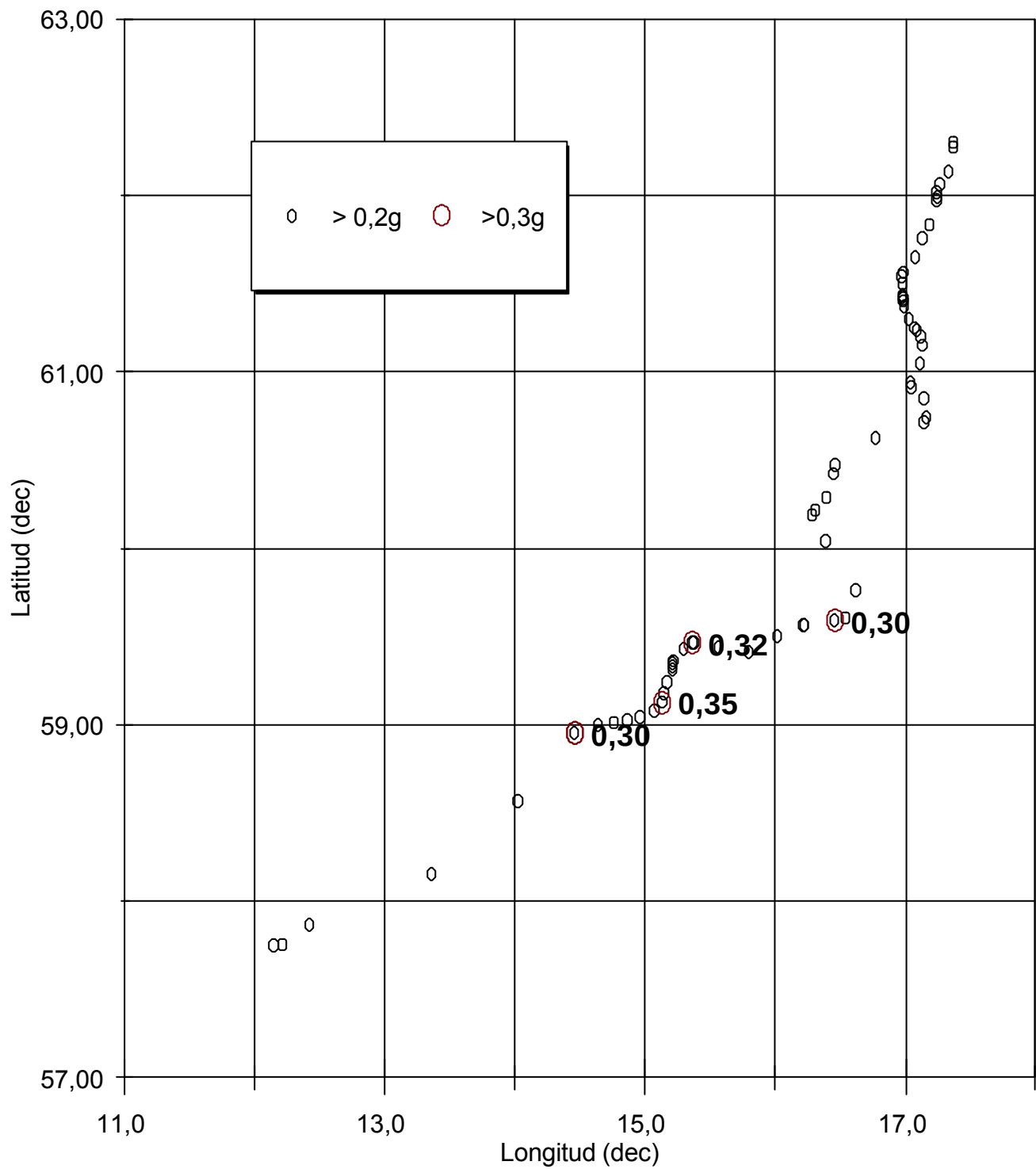
Position

Högsta vertikalaccelerationer, prov 1



Position

Högsta accelerationer, prov 2



Position

Högsta accelerationer, prov 4

