

Växjö universitet

Matematiska och system-
tekniska institutionen

Marcus Nilsson

Tentamen i Vektorgeometri, MA1021, 7.5 hp

Måndagen den 12 januari 2009, klockan 8–13.

Tentamensutdelning sker måndagen den 19/1 i D0043, 12.00-12.30.

Tillåtna hjälpmedel: Ej miniräknare

1. För vilka värden på det reella talet a är matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

INTE inverterbar. (5p)

2. Låt $u = (1, 2, 3)$ vara en vektor i rummet. Vi inför nu en ny bas (f_1, f_2, f_3) i rummet där

$$\begin{aligned} f_1 &= (1, 0, 1), \\ f_2 &= (0, 1, 2), \\ f_3 &= (-2, 2, 1). \end{aligned}$$

Visa att den nya basen verkligen är en bas och bestäm u 's koordinater i den nya basen. (5p)

3. Låt u och v vara två vektorer i rummet.

(a) Hur definieras $u + v$? (1p)

(b) Hur definieras tu , där t är ett reellt tal? (1p)

(c) Hur definieras skalärprodukten $u \cdot v$? (1p)

(d) Hur definieras vektorprodukten $u \times v$? (2p)

4. Bestäm minsta avståndet mellan punkten $(1, 3, 3)$ och linjen $(x, y, z) = (1 + t, 2 - t, -1 + 3t)$. (ON-bas) (5p)

5. Bestäm matrisen för speglingen i planet

$$3x + y + 4z = 0.$$

Bestäm också spegelbilden av vektorn $(1, 0, -1)$. (ON-bas) (5p)

6. (a) Bestäm egenvärden och en ON-bas av egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3\text{p})$$

- (b) Bestäm A^n , där n är ett positivt heltal. (2p)

7. Bestäm nollrummet och värderummet till den avbildning som i någon ON-bas har matrisen

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & 14 \\ 2 & -2 & -10 \\ -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}. \quad (5\text{p})$$

8. Låt u , v och w vara vektorer i rummet. Visa att volymen av den parallelepiped som spänns upp av u , v och w ges av absolutbeloppet av Volymfunktionen

$$V(u, v, w) = (u \times v) \cdot w. \quad (5\text{p})$$

Lycka till!

Lösningsförslag till tentamen i Vektorgeometri, MA1021, 7.5 hp

Måndagen den 12 januari 2009, klockan 8–13.

1. Vi löser detta genom att beräkna determinanten. Vi får

$$\begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2a - a^2.$$

Matrisen är INTE inverterbar om och endast om $1 - 2a - a^2 = 0$, d.v.s. då $a = 1 \pm \sqrt{2}$.

2. Vi bildar transformationsmatrisen

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Om (f_1, f_2, f_3) är en bas ska $\det(T) \neq 0$. Vi får $\det(T) = -1$ så vi har verkligen en ny bas.

För att bestämma koordinaterna för u i den nya basen måste vi bestämma T^{-1} . Vi får

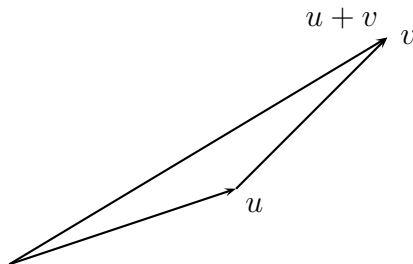
$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Eftersom

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

så är $u = (5, -2, 2)$ i den nya basen.

3. (a) Placera representanter för u och v enligt följande figur:



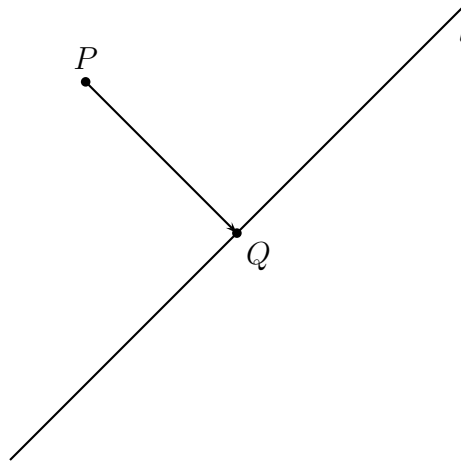
Vektorn som representeras av den riktade stäckan från u 's startpunkt till v 's slutpunkt är $u + v$.

- (b) Om $t > 0$ så är tu en vektor som har samma riktning som u men är t gånger så lång. Om $t < 0$ är tu den vektor som är motsatt riktad u och t gånger så lång som u . Om $t = 0$ så är tu nollvektorn.
- (c) Skalarprodukten $u \cdot v$ definieras enligt

$$u \cdot v = |u||v| \cos(\alpha),$$

där $|u|$ betecknas längden av u och α är vinkeln mellan u och v .

- (d) Vektorn $u \times v$ är den vektor som definieras av följande krav
- (i) Vektorn $u \times v$ är ortogonal mot både u och v .
 - (ii) Längden av $u \times v$ är arean av den parallelogram som u och v spänner upp.
 - (iii) Trippeln $(u, v, u \times v)$ är positivt orienterad.
4. Vi kallar linjen för l . Låt Q vara den punkt på linjen l som ligger närmast punkten $P = (1, 3, 3)$.



Det finns ett t_0 så att

$$Q = (1 + t_0, 2 - t_0, -1 + 3t_0).$$

Vi får

$$\overline{PQ} = (t_0, -1 - t_0, -4 + 3t_0).$$

Eftersom $\overline{PQ}$ är ortogonal mot linjen får vi

$$\overline{PQ} \cdot (1, -1, 3) = 0.$$

Detta ger

$$t_0 - (-1 - t_0) + 3(-4 + 3t_0) = -11 + 11t_0 = 0$$

alltså är $t_0 = 1$. Vi får $\overline{PQ} = (1, -2, -1)$ och det minsta avståndet blir därmed $|\overline{PQ}| = \sqrt{6}$.

5. Låt $u = (x_1, x_2, x_3)$ vara en vektor i rummet. Låt $S(u)$ vara spegligen av u i planet och låt $P(u)$ vara den vinkelräta projektionen av u på planet. Då finns ett reellt tal t så att

$$S(u) = u + 2t(3, 1, 4),$$

$$P(u) = u + t(3, 1, 4).$$

Eftersom $P(u) = (x_1 + 3t, x_2 + t, x_3 + 4t)$ är ortsvektor för en punkt i planet (planet innehåller origo) uppfyller den planets ekvation. Vi har

$$3(x_1 + 3t) + (x_2 + t) + 4(x_3 + 4t) = 0,$$

vilket ger

$$t = -\frac{1}{26}(3x_1 + x_2 + 4x_3).$$

Detta ger

$$S(u) = (x_1, x_2, x_3) - \frac{1}{13}(3x_1 + x_2 + 4x_3)(3, 1, 4).$$

Sätter vi $S(u) = (y_1, y_2, y_3)$ får vi

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - \frac{3}{13}(3x_1 + x_2 + 4x_3) = \frac{1}{13}(4x_1 - 3x_2 - 12x_3), \\ y_2 &= x_2 - \frac{1}{13}(3x_1 + x_2 + 4x_3) = \frac{1}{13}(-3x_1 + 12x_2 - 4x_3), \\ y_3 &= x_3 - \frac{4}{13}(3x_1 + x_2 + 4x_3) = \frac{1}{13}(-12x_1 - 4x_2 - 3x_3). \end{aligned}$$

Matrisen för speglingen blir

$$\frac{1}{13} \begin{pmatrix} 4 & -3 & -12 \\ -3 & 12 & -4 \\ -12 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Koordinaterna för (spegel)bilden av $u = (1, 0, -1)$ ges av

$$\frac{1}{13} \begin{pmatrix} 4 & -3 & -12 \\ -3 & 12 & -4 \\ -12 & -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 16 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Vi får alltså

$$S(u) = \frac{1}{13}(16, 1, -9).$$

6. (a) Eftersom matrisen är symmetrisk följer från spektralsatsen att det finns en ON-bas av egenvärden. Vi börjar med att bestämma egenvärden. Vi gör detta genom att lösa sekularekvationen $\det(A - \lambda E) = 0$. Vi får

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda = 0.$$

Egenvärdena blir alltså $\lambda = 0$ och $\lambda = 2$.

Egenvektorerna till $\lambda = 0$ löser systemet $Ax = 0$ d.v.s.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0, \\ -x_1 + x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Lösningarna kan skrivas $(x_1, x_2) = t(1, 1)$. En egenvektor av längd 1 är t.ex. $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$.

Egenvektorerna till $\lambda = 2$ löser systemet $Ax = 2x$, d.v.s.

$$-x_1 - x_2 = 0,$$

$$-x_1 - x_2 = 0.$$

Lösningarna kan skrivas $(x_1, x_2) = t(-1, 1)$. En egenvektor av längden 1 är $f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$.

Paret (f_1, f_2) är därmed en ON-bas av egenvektorer.

(b) Sätt

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vi har $D = T^{-1}AT$, d.v.s. $A = TDT^{-1}$. Detta ger att

$$A^n = TD^nT^{-1},$$

där $T^{-1} = T^t$ eftersom T är ortogonal. Vi får

$$A^n = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Vi kallar matrisen för A . Nollrummet ges av lösningen till det homogena systemet

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & 14 \\ 2 & -2 & -10 \\ -1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

vilka kan beskrivas enligt

$$(x_1, x_2, x_3) = t(3, -2, 1)$$

där t är ett godtyckligt reellt tal. Detta är en linje genom origo.

Dimensionssatsen ger att dimensionen av värderummet måste vara 2. Eftersom värderummet spänns upp av kolonnerna i matrisen A räcker det att hitta två icke-parallella kolonner i A för att spänna upp värderummet (ett plan). Vi tar $u = (-2, 2, 1)$ och $v = (2, -1, 1)$. Eftersom vi har en ON-bas vet vi då att

$$u \times v = (1, 0, -2)$$

är en normal till värderummet. Eftersom $(0, 0, 0)$ ligger i värderummet blir värderummets ekvation

$$x - 2z = 0.$$

8. Se boken, eller föreläsningssanteckningarna.