

VÄXJÖ UNIVERSITET

Matematiska och system-
tekniska institutionen

Robert Lagergren

Tentamen i Vektorgeometri, MAA 702, 5 p

Lördagen den 29 oktober 2005

För att erhålla maximal poäng på en uppgift krävs en fullständig lösning presenterad på ett sådant sätt att räkningar och resonemang är lätta att följa.

Hjälpmedel: medföljande formelsamling (ej miniräknare)

1. Sätt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- a) Visa att A är inverterbar och bestäm dess invers. Visa också att B inte är inverterbar. (3p)
- b) Beräkna $A \cdot (A^{-1} + B)$. (2p)
2. Vektorn u har koordinaterna $(-4, 1)$ i basen (e_1, e_2) . Bestäm koordinaterna för u i basen (f_1, f_2) , där $f_1 = 2e_1 + e_2$ och $f_2 = -e_1 + e_2$. (5p)
3. Låt Π vara det plan som går genom punkterna $(-3, 3, -1)$, $(3, 0, 2)$ och $(2, 3, 3)$.
 - a) Bestäm en ekvation på normalform för Π . (3p)
 - b) Bestäm eventuella skärningspunkter mellan Π och linjen som ges av ekvationen $(x, y, z) = (-3 + 2t, 7 - 3t, -13 + 7t)$, $t \in \mathbf{R}$. (2p)
4. Punkterna P_1, P_2, P_3 har koordinaterna $(1, 2, -2)$, $(2, 3, 0)$ och $(3, 1, 1)$ respektive, i ett ortonormerat koordinatsystem.
 - a) Bestäm arean av triangeln med hörn i P_1, P_2 och P_3 . (3p)
 - b) För vilka värden på a har tetraedern med hörn i punkterna P_1, P_2, P_3 och $(a, 4, -3)$ volymen 5? (2p)
5. Bestäm matrisen för speglingen i planet $x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$. Ange speciellt spegelbilden av $u = (1, 2, -1)$. (Koordinatsystemet är ortonormerat.) (5p)
6. Bestäm avståndet från punkten $(1, 3, 4)$ till den linje som går genom punkterna $(3, 1, 1)$ och $(1, 1, 2)$. (Koordinatsystemet är ortonormerat.) (5p)

VÄND!

7. Bestäm konstanten a så att $(2, 1)$ blir en egenvektor till den linjära avbildning F , som ges av matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & a \end{pmatrix}.$$

Bestäm också, för detta a , en ortonormerad bas av egenvektorer till F . (Koordinatsystemet är ortonormerat.) (5p)

8. Låt A vara arean av den parallelogram i planet som spänns upp av vektorerna u och v . Visa att (5p)

$$A^2 = \det \begin{pmatrix} u \cdot u & u \cdot v \\ u \cdot v & v \cdot v \end{pmatrix}.$$

LYCKA TILL!

Kortfattat lösningsförslag till tentamen i MAA 702, 29/10 2005

1. Sätt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- a) Visa att A är inverterbar och bestäm dess invers. Visa också att B inte är inverterbar.
b) Beräkna $A \cdot (A^{-1} + B)$.

Lösning

a) För att finna inversen till A löser vi följande ekvationssystem:

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = y_1 \\ 2x_2 = y_2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = y_1 \\ 2x_2 = y_2 \\ 2x_1 = y_1 + y_3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_3 \\ x_2 = \frac{1}{2}y_2 \\ x_3 = \frac{1}{2}y_1 + y_2 - \frac{1}{2}y_3 \end{cases} \end{aligned}$$

Det följer att A är inverterbar och att

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Eftersom

$$\det B = 8 + 2 - 2 - 8 = 0,$$

följer det att B inte är inverterbar.

b) Vi har att

$$\begin{aligned} A \cdot (A^{-1} + B) &= E + AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Vektorn u har koordinaterna $(-4, 1)$ i basen (e_1, e_2) . Bestäm koordinaterna för u i basen (f_1, f_2) , där $f_1 = 2e_1 + e_2$ och $f_2 = -e_1 + e_2$.

Lösning

Vi har att

$$(f_1 \ f_2) = (e_1 \ e_2) \cdot T,$$

där

$$T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En rättfram räkning ger att

$$T^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Koordinaterna för u i basen (f_1, f_2) ges av kolonnmatrisen

$$X_f = T^{-1} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

SVAR: Koordinaterna för u i basen (f_1, f_2) är $(-1, 2)$.

3. Låt Π vara det plan som går genom punkterna $(-3, 3, -1)$, $(3, 0, 2)$ och $(2, 3, 3)$.

a) Bestäm en ekvation på normalform för Π .

b) Bestäm eventuella skärningspunkter mellan Π och linjen som ges av ekvationen $(x, y, z) = (-3 + 2t, 7 - 3t, -13 + 7t)$, $t \in \mathbf{R}$.

Lösning

a) Sätt $P_0 = (-3, 3, -1)$, $P_1 = (3, 0, 2)$ och $P_2 = (2, 3, 3)$. Då är

$$\overrightarrow{P_0P_1} = 3(2, -1, 1), \quad \overrightarrow{P_0P_2} = 5(0, 4, 1).$$

Planet Π är alltså parallellt med vektorerna $u = (2, -1, 1)$ och $v = (5, 0, 4)$. Det följer att punkten $P = (x, y, z)$ ligger i planet Π om och endast om vektorn $\overrightarrow{P_0P} = (x + 3, y - 3, z + 1)$ ligger i samma plan som u och v , vilket är fallet om och endast om

$$\begin{vmatrix} x + 3 & 2 & 5 \\ y - 3 & -1 & 0 \\ z + 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Eftersom

$$\begin{vmatrix} x + 3 & 2 & 5 \\ y - 3 & -1 & 0 \\ z + 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -4(x + 3) + 5(y - 3) + 5(z + 1) - 8(y - 3) = -4x - 3y + 5z + 2,$$

så fås att planets ekvation är $-4x - 3y + 5z + 2 = 0$.

SVAR: Planets ekvation är $4x + 3y - 5z - 2 = 0$.

b) För att bestämma eventuella skärningspunkter sätter vi in parametriseringen av koordinaterna för punkterna på linjen i planets ekvation på normalform. Vi får att

$$4(-3 + 2t) + 3(7 - 3t) - 5(-13 + 7t) - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -36t + 72 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 2.$$

Det finns alltså en skärningspunkt; $P = (-3 + 2 \cdot 2, 7 - 3 \cdot 2, -13 + 7 \cdot 2) = (1, 1, 1)$.

SVAR: Skärningspunkten är $(1, 1, 1)$.

4. Punkterna P_1 , P_2 , P_3 har koordinaterna $(1, 2, -2)$, $(2, 3, 0)$ och $(3, 1, 1)$ respektive, i ett ortonormerat koordinatsystem.

a) Bestäm arean av triangeln med hörn i P_1 , P_2 och P_3 .

b) För vilka värden på a har tetraedern med hörn i punkterna P_1 , P_2 , P_3 och $(a, 4, -3)$ volymen 5?

Lösning

Vi bildar vektorerna $u = \overrightarrow{P_1P_2} = (1, 1, 2)$ och $v = \overrightarrow{P_1P_3} = (2, -1, 3)$. Triangelns area ges av

$$\frac{1}{2}|u \times v| = \frac{1}{2}|(5, 1, -3)| = \frac{1}{2}\sqrt{35}.$$

SVAR: Triangelns area är $\frac{1}{2}\sqrt{35}$.

b) Låt w vara vektorn som svarar mot den riktade sträckan från P_1 till punkten $(a, 4, -3)$. Då är $w = (a - 1, 2, -1)$. Tetraederns volym ges av

$$\frac{1}{6}|V(u, v, w)| = \frac{1}{6}|(u \times v) \cdot w| = \frac{1}{6}|(5, 1, -3) \cdot (a - 1, 2, -1)| = \frac{5}{6}|a|.$$

Vi får att tetraederns volym är lika med 5 om och endast om $\frac{5}{6}|a| = 5$, d.v.s. $a = \pm 6$.

SVAR: $a = \pm 6$.

5. Bestäm matrisen för speglingen i planet $x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$. Ange speciellt spegelbilden av $u = (1, 2, -1)$. (Koordinatsystemet är ortonormerat.)

Lösning

Låt S beteckna speglingen i planet $x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$. En normal till planet ges av $n = (1, 2, -1)$. Vi har att

$$(*) \quad S(u) = u - 2tn,$$

där talet t är sådant att $u - tn$ är parallell med planet (rita figur!). Antag att $u = (x_1, x_2, x_3)$ och $S(u) = (y_1, y_2, y_3)$. Då gäller att $u - tn = (x_1 - t, x_2 - 2t, x_3 + t)$ är parallell med planet om och endast om

$$(x_1 - t) + 2(x_2 - 2t) - (x_3 + t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{1}{6}(x_1 + 2x_2 - x_3).$$

Det följer nu av detta och $(*)$ att

$$\begin{aligned} (y_1, y_2, y_3) &= S(u) = u - 2tn = (x_1, x_2, x_3) - \frac{1}{3}(x_1 + 2x_2 - x_3)(1, 2, -1) = \\ &= \frac{1}{3}(2x_1 - 2x_2 + x_3, -2x_1 - x_2 + 2x_3, x_1 + 2x_2 + 2x_3). \end{aligned}$$

Alltså gäller att

$$\begin{cases} y_1 = (2x_1 - 2x_2 + x_3)/3 \\ y_2 = (-2x_1 - x_2 + 2x_3)/3 \\ y_3 = (x_1 + 2x_2 + 2x_3)/3 \end{cases}$$

Avbildningen S ges alltså av matrisen

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Spegelbilden till $u = (1, 2, -1)$ är (förstås) $-u = (-1, -2, 1)$ eftersom u är en normal till planet man speglar i. Detta resultat kan också fås genom att multiplicera A med kolonnmatrisen som består av koordinaterna för u .

6. Bestäm avståndet från punkten $(1, 3, 4)$ till den linje som går genom punkterna $(3, 1, 1)$ och $(1, 1, 2)$. (Koordinatsystemet är ortonormerat.)

Lösning

Vektorn $v = (1, 1, 2) - (3, 1, 1) = (-2, 0, 1)$ är en riktningsvektor för linjen. Punkterna på linjen ges av $P_t = (3 - 2t, 1, 1 + t)$, $t \in \mathbf{R}$. Sätt $Q = (1, 3, 4)$. Vi söker nu det värde på t , för vilket vektorn $\overrightarrow{QP_t} = (2 - 2t, -2, -3 + t)$ är ortogonal mot v (rita figur!). Eftersom

$$\overrightarrow{QP_t} \cdot v = (2 - 2t, -2, -3 + t) \cdot (-2, 0, 1) = -7 + 5t,$$

så fås att $\overrightarrow{QP_t}$ är ortogonal mot v om och endast om $-7 + 5t = 0$, d.v.s. $t = 7/5$. Avståndet från Q till linjen ges av

$$|\overrightarrow{QP_{7/5}}| = |(2 - 2 \cdot 7/5, -2, -3 + 7/5)| = \frac{2}{5} |(-2, -5, -4)| = \frac{2}{5} \sqrt{45} = \frac{6}{\sqrt{5}}.$$

SVAR Avståndet är $\frac{6}{\sqrt{5}}$.

7. Bestäm konstanten a så att $(2, 1)$ blir en egenvektor till den linjära avbildning F , som ges av matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & a \end{pmatrix}.$$

Bestäm också, för detta a , en ortonormerad bas av egenvektorer till F . (Koordinatsystemet är ortonormerat.)

Lösning

Vektorn $u = (2, 1)$ är en egenvektor till F om och endast om $F(u) = \lambda u$, för något reellt tal λ . Koordinaterna för $F(u)$ ges av

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ a + 8 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ (a + 8)/3 \end{pmatrix}.$$

Det följer att u är en egenvektor till F om och endast om $(a + 8)/3 = 1$, d.v.s. $a = -5$ (och motsvarande egenvärde är 3). Eftersom F är en symmetrisk avbildning, så finns det en ON-bas av egenvektorer (spektralsatsen). Alltså måste en vektor som är ortogonal mot u , säg $v = (-1, 2)$, också vara en egenvektor till F . Efter normering av u och v får vi således en ON-bas av egenvektorer till F : $e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 2)$.

SVAR: $a = -5$ och $e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 2)$ är en ON-bas av egenvektorer.

8. Låt A vara arean av den parallelogram i planet som spänns upp av vektorerna u och v . Visa att (5p)

$$A^2 = \det \begin{pmatrix} u \cdot u & u \cdot v \\ u \cdot v & v \cdot v \end{pmatrix}.$$

Lösning

Antag att u och v har koordinaterna (x_1, x_2) respektive (y_1, y_2) i någon ON-bas. I så fall är A lika med beloppet av determinanten av matrisen

$$T = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}.$$

Observera att

$$\begin{aligned} T^t \cdot T &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 & x_1 y_1 + x_2 y_2 \\ x_1 y_1 + x_2 y_2 & y_1^2 + y_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \cdot u & u \cdot v \\ u \cdot v & v \cdot v \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Det följer av detta och multiplikationssatsen för determinanter att

$$\det \begin{pmatrix} u \cdot u & u \cdot v \\ u \cdot v & v \cdot v \end{pmatrix} = \det(T^t T) = \det(T^t) \det(T) = (\det T)^2 = A^2,$$

vilket skulle visas.