

VÄXJÖ UNIVERSITET

Matematiska och system-

tekniska institutionen

Per-Anders Svensson

Tentamen i Vektorgeometri, MAA702, 5p

Måndagen den 13 juni 2005, klockan 8–13

Skrivningen består av åtta uppgifter, där varje uppgift kan ge maximalt fem poäng. För ett godkänt betyg krävs cirka 20 poäng. För att få maximal poäng på en uppgift krävs en fullständig lösning presenterad på ett sådant sätt, att räkningar och resonemang är lätta att följa.

Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon, ritdon och de två bifogade formelbladen. Miniräknare är *inte* tillåtet!

Om det inte uttryckligen säges något annat nedan, kan samtliga koordinater antas vara angivna i ett ortonormerat system.

1. Lös ekvationssystemet $AX = Y$, där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad Y = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

2. Vilka av nedanstående matriser är diagonaliserbara?

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

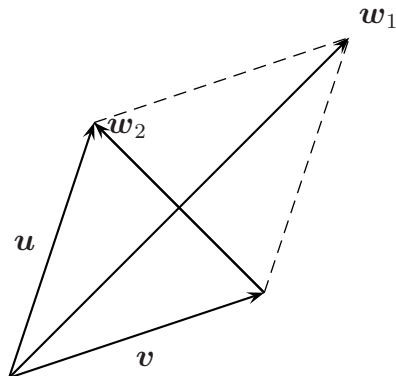
3. Bestäm en ekvation, dels på parameterform, dels på normalform, för det plan som innehåller de tre punkterna $(1, 2, 0)$, $(3, 1, 1)$ och $(1, -1, -4)$. Ligger även punkten $(0, -1, 2)$ i detta plan?
4. Bestäm talet a så att de tre vektorerna $(1, 0, a)$, $(a, 2, -1)$ och $(3, 2, 1)$ blir linjärt beroende.
5. Bestäm matrisen för den linjära avbildning P som projicerar varje vektor i rummet ortogonalt mot planet

$$3x - 2y + z = 0.$$

6. Bestäm en matris T sådan att $T^t A T$ blir en diagonalmatris, om

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Bestäm det kortaste avståndet mellan punkten $(1, 1, 1)$ och planet $2x + y - 2z + 8 = 0$.
8. Två vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ av samma längd spänner upp en romb, d.v.s. en parallelogram där alla fyra sidorna är lika långa. Låt $\mathbf{w}_1$ och $\mathbf{w}_2$ vara de vektorer som definieras av diagonalerna i denna romb, enligt figuren nedan.



Visa, genom att beräkna skalärprodukten $\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2$, att diagonalerna i romben skär varandra i rät vinkel.

Lycka till!

VÄXJÖ UNIVERSITETMatematiska och system-
tekniska institutionen

Per-Anders Svensson

**Lösningsförslag till skrivningen i
Vektorgeometri (MAA702)**

Måndagen den 13 juni 2005

Uppgift 1. Lös ekvationssystemet $AX = Y$, där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad Y = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

Lösning. Med hjälp av successiv elimination får vi

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 - x_3 = 7 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ -2x_1 + 4x_2 = -8 \end{array} \right. \begin{array}{l} \xrightarrow{-3} \\ \xleftarrow{-3} \\ \xleftarrow{2} \end{array} \iff \left\{ \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 - x_3 = 7 \\ 7x_2 + 4x_3 = -19 \\ -2x_3 = 6. \end{array} \right.$$

Från den tredje ekvationen får vi $x_3 = -3$. Därmed fås $7x_2 - 12 = -19$, d.v.s. $x_2 = -1$, från den andra ekvationen, vilket i sin tur leder till att $x_1 = 2$ i den första ekvationen. Således är

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = -3, \end{cases}$$

eller om man så vill

$$X = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix},$$

lösningen på ekvationssystemet. □**Uppgift 2.** Vilka av nedanstående matriser är diagonaliserbara?

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (d) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lösning. (a) En konsekvens av spektralsatsen är att alla symmetriska matriser är diagonaliserbara. Eftersom matrisen i denna deluppgift är symmetrisk, är den således diagonaliserbar.

(b) Här kan vi inte ta hjälp av spektralsatsen, eftersom matrisen ifråga inte är symmetrisk. För att avgöra om matrisen är diagonaliserbar, måste vi till att börja med bestämma dess egenvärden. Detta görs med sekularekvationen

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 &\iff (3-\lambda)(2-\lambda) - 2 = 0 \\ &\iff \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \\ &\iff \lambda = 1 \quad \text{eller} \quad \lambda = 4. \end{aligned}$$

Vi får som synes två olika egenvärden $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = 4$. Om $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ är egenvektorer som svarar mot λ_1 respektive λ_2 , så kan dessa två vektorer inte vara parallella. Det finns således en bas bestående av egenvektorer till matrisen i fråga, vilket betyder att matrisen är diagonaliserbar.

(c) Inte heller här kan spektralsatsen hjälpa oss, i och med att matrisen i uppgiften inte är symmetrisk. Precis som ovan måste vi alltså lösa sekularekvationen. I det här fallet får vi

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 &\iff (3-\lambda)(1-\lambda) + 1 = 0 \\ &\iff \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \\ &\iff (\lambda - 2)^2 = 0, \end{aligned}$$

d.v.s. $\lambda = 2$ är det enda egenvärdet. Motsvarande egenvektorer fås genom att lösa ekvationssystemet $\mathbf{A}\mathbf{X} = 2\mathbf{X}$, där $\mathbf{A}$ är matrisen ifråga. Vi får

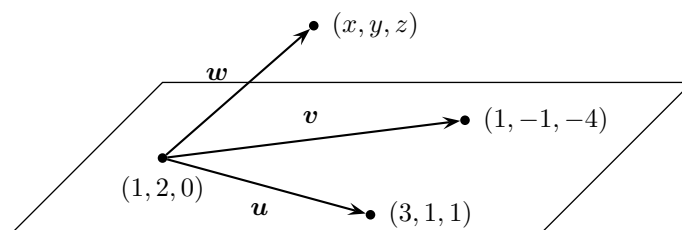
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 2x_1 \\ -x_1 + x_2 = 2x_2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Med $x_2 = t$ blir $x_1 = -t$, så detta ekvationssystem har de oändligt många lösningarna $(x_1, x_2) = t(-1, 1)$, $t \in \mathbb{R}$. Varje egenvektor är alltså parallell med $(-1, 1)$, vilket innebär att det inte går att bilda en bas som består av egenvektorer till matrisen. Därmed är matrisen *inte* diagonaliserbar.

(d) I och med att matrisen här är en diagonalmatris, är den givetvis diagonaliserbar. $\square$

Uppgift 3. Bestäm en ekvation, dels på parameterform, dels på normalform, för det plan som innehåller de tre punkterna $(1, 2, 0)$, $(3, 1, 1)$ och $(1, -1, -4)$. Ligger även punkten $(0, -1, 2)$ i detta plan?

Lösning. För att kunna ta fram ekvationen på parameterform för ett plan, så behöver vi känna till koordinaterna för (minst) en punkt som ligger i planet; vi kan t.ex. välja $(1, 2, 0)$. Vi behöver också koordinaterna för två vektorer som båda är parallella med planet men inte med varandra; för detta ändamål duger $\mathbf{u} = (3, 1, 1) - (1, 2, 0) = (2, -1, 1)$ och $\mathbf{v} = (1, -1, -4) - (1, 2, 0) = (0, -3, -4)$, se figuren nedan.



En ekvation på parameterform för planet ges därmed av

$$\begin{cases} x = 1 + 2s \\ y = 2 - s - 3t \\ z = s - 4t. \end{cases}$$

Låt (x, y, z) vara en godtycklig punkt i rummet. Denna punkt ligger i planet, om och endast om volymen av den parallelepiped som spänns upp av $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w} = (x - 1, y - 2, z)$ (se figuren ovan) är lika med noll. Eftersom volymen av denna parallelepiped ges av beloppet av determinanten

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & x-1 \\ -1 & -3 & y-2 \\ 1 & -4 & z \end{vmatrix} = -6z + 4(x-1) + 8(y-2) + 3(x-1) = 7x + 8y - 6z - 23,$$

så får vi planets ekvation på normalform till

$$7x + 8y - 6z - 23 = 0.$$

Punkten $(0, -1, 2)$ ligger *inte* i detta plan eftersom dess koordinater inte uppfyller planets ekvation; vi har $7 \cdot 0 + 8 \cdot (-1) - 6 \cdot 2 - 23 = -43 \neq 0$. $\square$

Uppgift 4. Bestäm talet a så att de tre vektorerna $(1, 0, a)$, $(a, 2, -1)$ och $(3, 2, 1)$ blir linjärt beroende.

Lösning. De tre vektorerna är linjärt beroende, om och endast om den parallelepiped som de spänner upp har volymen noll. I stil med lösningsförslaget till föregående uppgift, kan vi avgöra detta genom att sätta den determinant, vars kolonner utgörs av koordinaterna för var och en av vektorerna, till noll. Eftersom

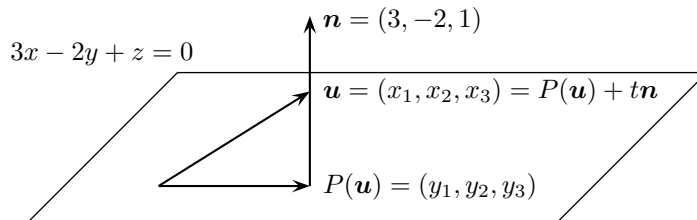
$$\begin{vmatrix} 1 & a & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ a & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 2a^2 + 2 - 6a = 2a^2 - 6a + 4,$$

skall alltså $a^2 - 3a + 2 = 0$, d.v.s. $a = 1$ eller $a = 2$. $\square$

Uppgift 5. Bestäm matrisen för den linjära avbildning P som projicerar varje vektor i rummet ortogonalt mot planet

$$3x - 2y + z = 0.$$

Lösning. Låt $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3)$ vara en godtycklig vektor i rummet, och sätt $P(\mathbf{u}) = (y_1, y_2, y_3)$. Vektorn $\mathbf{n} = (3, -2, 1)$ är en normalvektor till planet. Av figuren nedan ser vi att $\mathbf{u} = P(\mathbf{u}) + t\mathbf{n}$, för något reellt tal t .



Vi har alltså $P(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - t\mathbf{n}$, vilket ger

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - 3t \\ y_2 = x_2 + 2t \\ y_3 = x_3 - t. \end{cases} \quad (1)$$

Koordinaterna för $P(\mathbf{u})$ uppfyller planets ekvation. Därmed måste

$$3(x_1 - 3t) - 2(x_2 + 2t) + (x_3 - t) = 0,$$

vilket betyder att

$$t = \frac{1}{14}(3x_1 - 2x_2 + x_3).$$

Tillsammans med (1) leder detta till att

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - 3t = x_1 - \frac{3}{14}(3x_1 - 2x_2 + x_3) = \frac{1}{14}(5x_1 + 6x_2 - 3x_3) \\ y_2 &= x_2 + 2t = x_2 + \frac{2}{14}(3x_1 - 2x_2 + x_3) = \frac{1}{14}(6x_1 + 10x_2 + 2x_3) \\ y_3 &= x_3 - t = x_3 - \frac{1}{14}(3x_1 - 2x_2 + x_3) = \frac{1}{14}(-3x_1 + 2x_2 + 13x_3). \end{aligned}$$

Med

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

så kan detta på matrisform skrivas $Y = AX$, där

$$A = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 5 & 6 & -3 \\ 6 & 10 & 2 \\ -3 & 2 & 13 \end{bmatrix}$$

är den sökta matrisen för P . □

Uppgift 6. Bestäm en matris T sådan att $T^t A T$ blir en diagonalmatris, om

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lösning. För det första noterar vi att A är en symmetrisk matris. Enligt spektralsatsen finns det då en ON-bas bestående av egenvektorer till A . Detta innebär att A är diagonaliserbar, och att basbytesmatrisen (eller transformationsmatrisen) T kan väljas som en ortogonal matris, d.v.s. så att $T^{-1} = T^t$. Matrisen T blir ortogonal "automatiskt", om vi ser så att dess kolonner utgörs av parvis ortogonala normerade egenvektorer till A .

Med hjälp av Sarrus' regel får vi

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 1 \\ 0 & -1 - \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= -(1 - \lambda)^2(1 + \lambda) + (1 + \lambda) \\ &= (1 + \lambda)[1 - (1 - \lambda)^2] \\ &= (\lambda + 1)[-(\lambda^2 - 2\lambda)] \\ &= -\lambda(\lambda + 1)(\lambda - 2), \end{aligned}$$

så sekulärekvationen $\det(A - \lambda E) = 0$ har rötterna $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$ och $\lambda_3 = 2$, vilka också är A :s egenvärden.

Vi bestämmer nu motsvarande egenvektorer, genom att lösa ekvationssystemen $AX = \lambda_i X$ för $i = 1, 2, 3$.

Egenvärdet $\lambda_1 = -1$ ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 & + x_3 = -x_1 \\ & - x_2 = -x_2 \\ x_1 & + x_3 = -x_3. \end{cases}$$

Ekvationen i mitten säger här att x_2 får vara godtyckligt. De övriga två ekvationerna kan skrivas om till det homogena ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_3 = 0, \end{cases}$$

som har $x_1 = x_3 = 0$ som sin enda lösning. Således är varje vektor på formen $t(0, 1, 0)$, där $t \neq 0$, en egenvektor till A som hör till egenvärdet $\lambda_1 = -1$. Genom att välja $t = 1$ får vi en egenvektor

$$\mathbf{u}_1 = (0, 1, 0)$$

som är av längd 1.

För egenvärdet $\lambda_2 = 0$ erhålles ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 & + x_3 = 0 \\ & - x_2 = 0 \\ x_1 & + x_3 = 0. \end{cases}$$

Enligt mittenekvationen är $x_2 = 0$. Sätter vi vidare $x_3 = t$ så blir $x_1 = -t$, så varje vektor på formen $t(-1, 0, 1)$, där $t \neq 0$, är en egenvektor till A som motsvarar egenvärdet $\lambda_2 = 0$. En egenvektor av längd 1 fås i form av

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1).$$

Slutligen får vi för egenvärdet $\lambda_3 = 2$ ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 & + x_3 = 2x_1 \\ & - x_2 = 2x_2 \\ x_1 & + x_3 = 2x_3 \end{cases} \iff \begin{cases} -x_1 & + x_3 = 0 \\ & - 3x_2 = 0 \\ x_1 & - x_3 = 0. \end{cases}$$

Utifrån detta ekvationssystem konstaterar vi att varje vektor på formen $t(1, 0, 1)$, där $t \neq 0$, är en egenvektor motsvarande egenvärdet $\lambda_3 = 2$ till A . En egenvektor av längd 1 ges alltså av

$$\mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1).$$

Den sökta matrisen T fås nu som

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

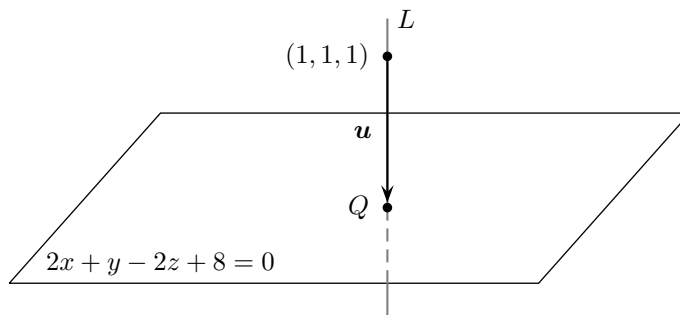
där vi som synes har valt kolonnerna i T till koordinaterna för egenvektorerna $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ respektive $\mathbf{u}_3$.¹ $\square$

Uppgift 7. Bestäm det kortaste avståndet mellan punkten $(1, 1, 1)$ och planet $2x + y - 2z + 8 = 0$.

Lösning. Vi börjar med att dra en rät linje L genom punkten $(1, 1, 1)$, ortogonal mot planet $2x + y - 2z + 8 = 0$. Från planets ekvation ser vi att vektorn med koordinaterna $(2, 1, -2)$ är en normal till planet. Denna vektor är därmed riktningsvektor till L . Låt Q vara den punkt, i vilken L skär planet. Då är

$$Q = (1 + 2t, 1 + t, 1 - 2t),$$

för något $t \in \mathbb{R}$.



Låt $\mathbf{u}$ vara den vektor som kan representeras av den riktade sträckan från $(1, 1, 1)$ till Q , se figuren. Avståndet mellan $(1, 1, 1)$ och planet är lika med denna vektors längd. Vi har

$$\mathbf{u} = (1 + 2t, 1 + t, 1 - 2t) - (1, 1, 1) = (2t, t, -2t),$$

så därmed är

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{(2t)^2 + t^2 + (-2t)^2} = \sqrt{9t^2} = 3|t|.$$

Som synes är vi i behov av att bestämma t . Detta kan vi göra genom att utnyttja att $Q = (1 + 2t, 1 + t, 1 - 2t)$ ligger i planet, och att dess koordinater därmed uppfyller planets ekvation. Således måste

$$2(1 + 2t) + (1 + t) - 2(1 - 2t) + 8 = 0 \iff 9t + 9 = 0 \iff t = -1,$$

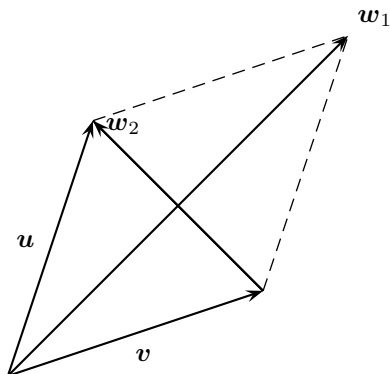
vilket i sin tur leder till att

$$|\mathbf{u}| = 3 \cdot |-1| = 3$$

är det sökta avståndet. $\square$

Uppgift 8. Två vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ av samma längd spänner upp en romb, d.v.s. en parallelogram där alla fyra sidorna är lika långa. Låt $\mathbf{w}_1$ och $\mathbf{w}_2$ vara de vektorer som definieras av diagonalerna i denna romb, enligt figuren nedan.

¹Men då det i uppgiften inte ställs några som helst krav på T , annat än att $T^t A T$ skall vara en diagonalmatris, kan man göra det enkelt för sig genom att helt enkelt välja T till nollmatrisen av typ 3×3 .



Visa, genom att beräkna skalärprodukten $w_1 \cdot w_2$, att diagonalerna i romben skär varandra i rät vinkel.

Lösning. Av figuren ser vi att $w_1 = u + v$, medan $w_2 = u - v$. Detta ger att

$$w_1 \cdot w_2 = (u + v) \cdot (u - v) = u \cdot u - u \cdot v + v \cdot u - v \cdot v = |u|^2 - |v|^2 = 0,$$

där den sista likheten beror på att u och v har samma längd; $|u| = |v|$. Således är vektorerna w_1 och w_2 ortogonala. Just i det här fallet betyder detta att rombens båda diagonaler skär varandra i rät vinkel, vilket skulle bevisas. $\square$