

VÄXJÖ UNIVERSITET

Matematiska och system-

tekniska institutionen

Per-Anders Svensson

Tentamen i Vektorgeometri, MAA702, 5p

Måndagen den 30 maj 2005, klockan 8–13

Skrivningen består av åtta uppgifter, där varje uppgift kan ge maximalt fem poäng. För ett godkänt betyg krävs cirka 20 poäng. För att få maximal poäng på en uppgift krävs en fullständig lösning presenterad på ett sådant sätt, att räkningar och resonemang är lätta att följa.

Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon, ritdon och de två bifogade formelblad. Miniräknare är *inte* tillåtet!

Om det inte uttryckligen säges något annat nedan, kan samtliga koordinater antas vara angivna i ett ortonormerat system.

1. Bestäm samtliga vektorer som är ortogonala mot både $(1, 4, -1)$ och $(2, -1, 1)$.
2. Beräkna A^{100} , där

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. För vilka värden på de reella talen a och b har ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y = a \\ 4x - by = 1 \end{cases}$$

- (a) exakt en lösning?
 - (b) oändligt många lösningar?
 - (c) ingen lösning alls?
4. Låt S beteckna den linjära avbildning som speglar varje vektor i rummet i planet

$$2x - y - 2z = 0.$$

- (a) Bestäm matrisen för S .
 - (b) Beräkna $S(\mathbf{u}_1)$, $S(\mathbf{u}_2)$ och $S(\mathbf{u}_3)$, där $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 0, 1)$ respektive $\mathbf{u}_3 = (-2, 1, 2)$.
5. Bestäm en ortonormerad bas (ON-bas) av egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. För vilket värde på det reella talet a har den tetraeder, vars hörn utgörs av punkterna $(0, 0, 2)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, -1)$ och $(3, a, 1)$, volymen 1?
7. Bestäm en ekvation på normalform för det plan som innehåller punkterna $(1, 4, -4)$ och $(2, 3, -5)$ samt är parallellt med den rätta linjen

$$(x, y, z) = (1 + t, -2t, 3 + 2t).$$

8. Låt A vara en inverterbar matris. Antag att A lika med sin egen invers, d.v.s. att $A^{-1} = A$. Bevisa att $\det(A)$ i så fall antingen är lika med 1 eller -1 .

Lycka till!

VÄXJÖ UNIVERSITET

Matematiska och system-
tekniska institutionen

Per-Anders Svensson

Lösningssförslag till skrivningen i Vektorgeometri (MAA702) måndagen den 30 maj 2005

Uppgift 1. Bestäm samtliga vektorer som är ortogonala mot både $(1, 4, -1)$ och $(2, -1, 1)$.

Lösning. Sätt $\mathbf{u} = (1, 4, -1)$ och $\mathbf{v} = (2, -1, 1)$. Vi får åtminstone en vektor som är ortogonal mot både $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$, genom att beräkna vektorprodukten $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Denna är lika med

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (4 \cdot 1 - (-1) \cdot (-1), (-1) \cdot 2 - 1 \cdot 1, 1 \cdot (-1) - 4 \cdot 2) = (3, -3, -9).$$

Samtliga vektorer ortogonala mot både $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ ges nu av samtliga vektorer som är parallella med $(3, -3, -9)$, d.v.s. samtliga vektorer på formen $t(1, -1, -3)$, där t är ett godtyckligt reellt tal. $\square$

Uppgift 2. Beräkna A^{100} , där

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Lösning. Vi löser problemet genom att diagonalisera A . Först bestämmer vi egenvärdena till A genom att lösa sekularekvationen $\det(A - \lambda E) = 0$. Vi får då

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0 &\iff (3 - \lambda)^2 - 1 = 0 \\ &\iff \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0 \\ &\iff \lambda = 3 \pm \sqrt{3^2 - 8} = 3 \pm 1, \end{aligned}$$

så A har egenvärdena $\lambda_1 = 2$ och $\lambda_2 = 4$. Motsvarande egenvektorer finner vi som lösningar till ekvationssystemen $A\mathbf{x} = 2\mathbf{x}$ respektive $A\mathbf{x} = 4\mathbf{x}$. För $\lambda_1 = 2$ erhåller vi alltså ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 2x_1 \\ x_1 + 3x_2 = 2x_2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

Vi ser att samtliga egenvektorer till A hörande till egenvärdet $\lambda_1 = 2$ ges av alla $(x_1, x_2) = (t, -t) = t(1, -1)$, där $t \neq 0$. För $t = 1$ får vi egenvektorn $\mathbf{v}_1 = (1, -1)$.

Motsvarande ekvationssystem att lösa för egenvärdet $\lambda_2 = 4$ är

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 4x_1 \\ x_1 + 3x_2 = 4x_2 \end{cases} \iff \begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Samtliga lösningar ges här av $(x_1, x_2) = (t, t) = t(1, 1)$, där $t \neq 0$. Därmed är $\mathbf{v}_2 = (1, 1)$ en egenvektor som hör till egenvärdet $\lambda_2 = 4$.

Vi bildar en basbytesmatris T genom att som dess kolonner välja koordinaterna för $\mathbf{v}_1$ respektive $\mathbf{v}_2$, d.v.s. enligt

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Därmed är

$$D = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

en diagonalmatris, och vi har $A = TDT^{-1}$. Detta ger att $A^{100} = TD^{100}T^{-1}$. Eftersom

$$T^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

så får vi

$$\begin{aligned} A^{100} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2^{100} & 0 \\ 0 & 4^{100} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4^{100} + 2^{100} & 4^{100} - 2^{100} \\ 4^{100} - 2^{100} & 4^{100} + 2^{100} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

som lösningen på problemet. $\square$

Uppgift 3. För vilka värden på de reella talen a och b har ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y = a \\ 4x - by = 1 \end{cases}$$

- (a) exakt en lösning?
- (b) oändligt många lösningar?
- (c) ingen lösning alls?

Lösning. Ekvationssystemet kan på matrisform skrivas

$$AX = B,$$

där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -b \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Det finns en entydig lösning till detta ekvationssystem, om och endast om $\det(A) \neq 0$. Eftersom

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -b \end{vmatrix} = 1 \cdot (-b) - 2 \cdot 4 = -b - 8,$$

så innebär detta att ekvationssystemet har entydig lösning, om och endast om $b \neq -8$. Det spelar alltså inte någon roll vilket värde a har i detta fall.

Vi studerar nu vad som händer om $b = -8$. I detta fall får ekvationssystemet utseendet

$$\begin{cases} x + 2y = a \\ 4x + 8y = 1. \end{cases}$$

Den första ekvationen kan även skrivas $4x + 8y = 4a$, så ekvationerna kommer därmed att bli ekvivalenta, om $4a = 1$. I annat fall motsäger ekvationerna varandra. Detta innebär att om $b = -8$ och $a = 1/4$, så har systemet oändligt många lösningar, medan det saknas lösningar om $b = -8$ och $a \neq 1/4$.

Vi sammanfattar: Ekvationssystemet har

- (a) exakt en lösning, om $b \neq -8$
- (b) oändligt många lösningar, om $a = 1/4$ och $b = -8$
- (c) inga lösningar, om $a \neq 1/4$ och $b = -8$.

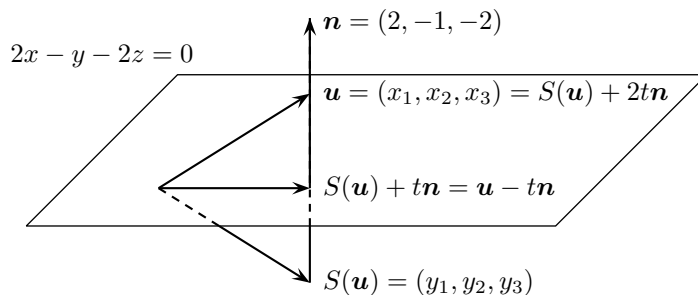
□

Uppgift 4. Låt S beteckna den linjära avbildning som speglar varje vektor i rummet i planet

$$2x - y - 2z = 0.$$

- (a) Bestäm matrisen för S .
- (b) Beräkna $S(\mathbf{u}_1)$, $S(\mathbf{u}_2)$ och $S(\mathbf{u}_3)$, där $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 0, 1)$ respektive $\mathbf{u}_3 = (-2, 1, 2)$.

Lösning. (a) Vi låter $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3)$ vara en godtycklig vektor i rummet, och sätter $S(\mathbf{u}) = (y_1, y_2, y_3)$. Vektorn $\mathbf{n} = (2, -1, -2)$ är en normalvektor till planet. Av figuren nedan ser vi att $\mathbf{u} = S(\mathbf{u}) + 2t\mathbf{n}$, där t är det reella tal för vilket vektorn $S(\mathbf{u}) + t\mathbf{n}$ är parallell med planet, se figuren nedan.



Av sambandet $\mathbf{u} = S(\mathbf{u}) + 2t\mathbf{n}$ följer $S(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - 2t\mathbf{n}$, så därmed gäller

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - 4t \\ y_2 = x_2 + 2t \\ y_3 = x_3 + 4t. \end{cases} \quad (1)$$

Men $S(\mathbf{u}) + t\mathbf{n} = \mathbf{u} - t\mathbf{n}$ är en vektor parallell med planet, så dess koordinater uppfyller därmed planets ekvation (i och med att planet innehåller origo). Eftersom $\mathbf{u} - t\mathbf{n} = (x_1 - 2t, x_2 + t, x_3 + 2t)$ så måste därmed

$$2(x_1 - 2t) - (x_2 + t) - 2(x_3 + 2t) = 0.$$

Vi löser ut t ur denna ekvation och får

$$t = \frac{1}{9}(2x_1 - x_2 - 2x_3).$$

Tillsammans med (1) leder detta till att

$$\begin{aligned}y_1 &= x_1 - 4t = x_1 - \frac{4}{9}(2x_1 - x_2 - 2x_3) = \frac{1}{9}(x_1 + 4x_2 + 8x_3) \\y_2 &= x_2 + 2t = x_2 + \frac{2}{9}(2x_1 - x_2 - 2x_3) = \frac{1}{9}(4x_1 + 7x_2 - 4x_3) \\y_3 &= x_3 + 4t = x_3 + \frac{4}{9}(2x_1 - x_2 - 2x_3) = \frac{1}{9}(8x_1 - 4x_2 + x_3),\end{aligned}$$

vilket på matrisform kan skrivas

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 4 & 7 & -4 \\ 8 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Således är

$$A = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 4 & 7 & -4 \\ 8 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisen för S (i den givna basen).

(b) Att beräkna $S(\mathbf{v})$ för en allmän vektor $\mathbf{v}$ kan göras genom att beräkna matrisprodukten AX , där X är den kolonnmatrix, vars element utgörs av koordinaterna till $\mathbf{v}$. Med $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1)$ får vi alltså

$$S(\mathbf{u}_1) = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 4 & 7 & -4 \\ 8 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 13 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Således är $S(\mathbf{u}_1) = (13/9, 7/9, 5/9)$. Samma teknik kan givetvis användas för att beräkna $S(\mathbf{u}_2)$ och $S(\mathbf{u}_3)$, men för just dessa två vektorer kan vi slippa undan matrismultiplicering, genom att utnyttja att $\mathbf{u}_2$ är parallell med planet i fråga, och att $\mathbf{u}_3$ är parallell med normalvektorn $\mathbf{n}$. Eftersom S är en spegling i ovan nämnda plan, är därmed $S(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2$ och $S(\mathbf{u}_3) = -\mathbf{u}_3$. $\square$

Uppgift 5. Bestäm en ortonormerad bas (ON-bas) av egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lösning. För det första noterar vi att A är en symmetrisk matris. I och med detta garanterar spektralsatsen att det finns en ON-bas av egenvektorer.

Med hjälp av Sarrus' regel får vi

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 3 & 0 \\ 3 & -\lambda & 4 \\ 0 & 4 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^3 - 16(-\lambda) - 9(-\lambda) = -\lambda^3 + 25\lambda,$$

så sekularekvationen $\det(A - \lambda E) = 0$ har rötterna $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = 0$ och $\lambda_3 = 5$, vilka också är A 's egenvärden.

Vi bestämmer nu motsvarande egenvektorer, genom att lösa ekvationssystemen $AX = \lambda_i X$ för $i = 1, 2, 3$.

Eigenvärdet $\lambda_1 = -5$ ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3x_2 & = -5x_1 \\ 3x_1 + 4x_3 & = -5x_2 \\ 4x_2 & = -5x_3. \end{cases}$$

Genom att sätta $x_3 = 4t$ så blir $x_2 = -5t$ på grund av den tredje ekvationen, vilket i sin tur med hjälp av den första ekvationen medför att $x_1 = 3t$. Således är alla vektorer $t(3, -5, 4)$, där $t \neq 0$, egenvektorer hörande till eigenvärdet $\lambda_1 = -5$. Eftersom

$$|(3, -5, 4)| = \sqrt{3^2 + (-5)^2 + 4^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2},$$

så får vi en egenvektor av längd 1 i form av

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{5\sqrt{2}}(3, -5, 4).$$

För eigenvärdet $\lambda_2 = 0$ erhålles ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3x_2 & = 0 \\ 3x_1 + 4x_3 & = 0 \\ 4x_2 & = 0 \end{cases}$$

och för eigenvärdet $\lambda_3 = 5$ ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3x_2 & = 5x_1 \\ 3x_1 + 4x_3 & = 5x_2 \\ 4x_2 & = 5x_3. \end{cases}$$

Samtliga lösningar till vart och ett av dessa ekvationssystem är mängden av alla vektorer $t(-4, 0, 3)$ respektive $t(3, 5, 4)$, där $t \in \mathbb{R}$. Egenvektorer av längd 1 får vi alltså som

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{5}(-4, 0, 3),$$

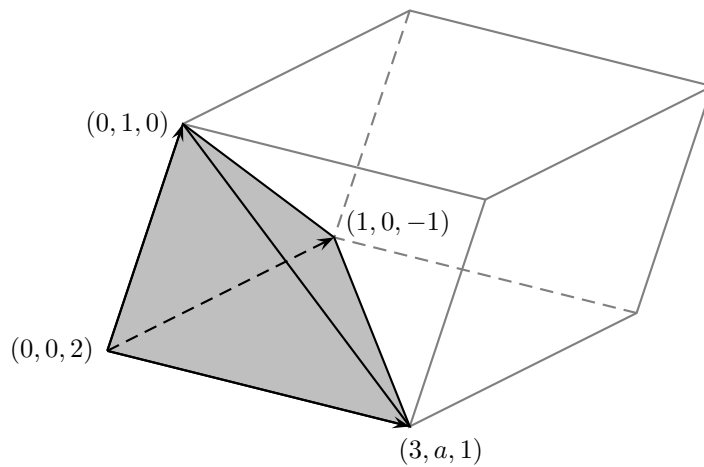
svarande mot eigenvärdet $\lambda_2 = 0$, och

$$\mathbf{u}_3 = \frac{1}{5\sqrt{2}}(3, 5, 4),$$

svarande mot eigenvärdet $\lambda_3 = 5$. □

Uppgift 6. För vilket värde på det reella talet a har den tetraeder, vars hörn utgörs av punkterna $(0, 0, 2)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, -1)$ och $(3, a, 1)$, volymen 1?

Lösning. Sätt $A = (0, 0, 2)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (1, 0, -1)$ och $D = (3, a, 1)$. Volymen av tetraedern med hörnen i punkterna A , B , C och D är lika med en sjättedel av volymen av den parallelepiped som spänns upp av $\overline{AB} = (0, 1, -2)$, $\overline{AC} = (1, 0, -3)$ och $\overline{AD} = (3, a, -1)$, se figuren nedan.



Vi har

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & a \\ -2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -2(a+4),$$

och eftersom parallelepipedens volym är lika med absolutbeloppet av ovanstående determinant, måste alltså

$$|-2(a+4)| = 6$$

vilket innebär att $a = -1$ eller $a = -7$. Det finns alltså två möjliga värden på a , ett som gör att $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ och $\overline{AD}$ blir positivt orienterade och ett som gör att de blir negativt orienterade. $\square$

Uppgift 7. Bestäm en ekvation på normalform för det plan som innehåller punkterna $(1, 4, -4)$ och $(2, 3, -5)$ samt är parallellt med den rätta linjen

$$(x, y, z) = (1 + t, -2t, 3 + 2t).$$

Lösning. Sätt $P = (1, 4, -4)$ och $Q = (2, 3, -5)$. Då är vektorn

$$\mathbf{v}_1 = \overline{PQ} = (1, -1, -1)$$

parallell med planet. En annan vektor som är parallell med planet är

$$\mathbf{v}_2 = (1, -2, 2),$$

i och med att denna vektor är riktningsvektor för den givna rätta linjen.

En godtycklig punkt $R = (x, y, z)$ ligger nu i planet, om och endast om volymen av den parallelepiped som spänns upp av de tre vektorerna $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3 = \overline{RP} = (x-1, y-4, z+4)$ är lika med noll. Detta ger att

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x-1 \\ -1 & -2 & y-4 \\ -1 & 2 & z+4 \end{vmatrix} = 0$$

Vänsterledet fås (med hjälp av Sarrus' regel) till att bli $12 - 4x - 3y - z$. Planets ekvation på normalform kan därmed skrivas $4x + 3y + z - 12 = 0$. $\square$

Uppgift 8. Låt A vara en inverterbar matris. Antag att A lika med sin egen invers, d.v.s. att $A^{-1} = A$. Bevisa att $\det(A)$ i så fall antingen är lika med 1 eller -1 .

Lösning. Eftersom $A^{-1} = A$, så gäller givetvis $\det(A^{-1}) = \det(A)$. Men å andra sidan gäller för varje inverterbar matris, att

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Detta medför att

$$\det(A) = \frac{1}{\det(A)},$$

eller, om man så vill, $[\det(A)]^2 = 1$. Således måste $\det(A) = 1$ eller $\det(A) = -1$, vilket skulle bevisas. $\square$