

SKRIVNING I VEKTORGEOMETRI

Delkurs 1 2015

Om inget annat uttryckligen sägs, kan koordinaterna för en vektor i antas vara givna i en ON-bas. Baser i rummet kan dessutom antas vara positivt orienterade.

1. För vilket värde på konstanten a har ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ -3x + ay + 3z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$

oändligt många lösningar? Lös systemet för detta värde på a .

2. Punkterna $P = (x, 0, 1)$ och $Q = (1, 2, 5)$ och $R = (1, 1, 1)$ utgör varsitt hörn i en triangel i rummet. Bestäm x så att denna triangel får arean 2.

3. Lös matrisekvationen

$$(AX + B)^{-1} = A,$$

där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Vektorerna $\mathbf{u} = \frac{1}{3}(1, 2, 2)$ och $\mathbf{w} = \frac{1}{3}(-2, -1, 2)$ är givna. Bestäm en vektor $\mathbf{v}$ sådan att $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ bildar en positivt orienterad ON-bas.
5. Låt $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ vara en bas för rummets vektorer. Visa att $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$, där

$$\begin{cases} \mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{f}_3 = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$$

också är en bas för rummets vektorer. Vilka vektorer har precis samma koordinaterna i basen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ som i basen $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$?

SKRIVNING I VEKTORGEOMETRI

Delkurs 1 2015

Lösningsförslag

1. Ett linjärt ekvationssystem har antingen exakt en lösning, oändligt många lösningar eller ingen lösning alls. Eftersom ekvationssystemet är homogent (samtliga högerled är lika med 0) är det sistnämnda fallet inte aktuellt här, eftersom den triviala lösningen $x = y = z = 0$ alltid kommer att vara en lösning, oavsett hur vänsterleden ser ut. Frågan alltså är om detta är den enda lösningen.

Enklast är att först studera koefficientmatrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & a & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

och dess determinant. Med hjälp av Sarrus' regel finner vi (efter förenkling) att $\det A = -9 - 2a$. Ett ekvationssystem med A som koefficientmatris har en entydig lösning, om och endast om $\det A \neq 0$. I vårt fall blir det alltså om och endast om $-9 - 2a \neq 0$, d.v.s. $a \neq -9/2$, som det finns exakt en lösning (och denna måste då vara den triviala). Således finns det oändligt många lösningar om $a = -9/2$.

För att ta reda på hur lösningarna ser ut när $a = -9/2$ sätter vi helt enkelt in detta värde på a i ekvationssystemet. För att slippa bråkital bland koefficienterna passar vi samtidigt på att multiplicera mittenekvationen med 2:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ -6x - 9y + 6z = 0 \\ 2y - z = 0. \end{cases}$$

Vi eliminerar x från mittenekvationen genom att till denna ekvation addera den första ekvationen, multiplicerad med 3:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ -6y + 3z = 0 \\ 2y - z = 0. \end{cases}$$

Den andra och den tredje ekvationen är nu ekvivalenta med varandra. Genom att t.ex. välja $z = 4t$ så blir $2y = 4t$, d.v.s. $y = 2t$, vilket i sin tur ger $2x = z - y = 4t - 2t = 2t$, d.v.s. $x = t$. (Enda vitsen med att välja z till $4t$ och inte till t är att vi med detta val kan uttrycka lösningen utan att ta till bråkital.) De oändligt många lösningarna ges alltså av

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 4t, \end{cases}$$

där t är ett godtyckligt reellt tal.

Alternativ lösning: Det går givetvis att ge sig på det ursprungliga ekvationssystemet direkt, och försöka lösa det med hjälp av Gausselimination. Om

vi (för att slippa bråktalet i koefficienterna) först multiplicerar den mittersta ekvationen med 2:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ -6x + 2ay + 6z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$

och därefter eliminerar x från den andra ekvationen med hjälp av den första får vi systemet

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ (2a + 3)y + 3z = 0 \\ 2y - z = 0. \end{cases}$$

Om den tredje ekvationen, multiplicerad med 3, adderas till mittenekvationen, elimineras z från denna ekvation och kvar blir

$$(2a + 9)y = 0.$$

Om $2a + 9 \neq 0$, d.v.s. om $a \neq -9/2$ kommer $x = y = z = 0$ vara den enda lösningen till systemet, medan om $a = -9/2$ så finns oändligt många lösningar och dessa kan plockas fram med samma metod som tidigare.

Svar: Systemet oändligt många lösningar om $a = -9/2$. Dessa ges då av $(x, y, z) = t(1, 2, 4)$, t reellt tal.

2. Triangelns area är lika med halva arean av den parallelogram som spänns upp av vektorerna $\vec{RQ} = (0, -1, -4)$ och $\vec{RP} = (1 - x, 1, 0)$. (Ett annat val av vektorer är givetvis möjligt.) Arean av denna parallelogram ges i sin tur av längden av vektorprodukten $\vec{RQ} \times \vec{RP}$. Vi finner med hjälp av formeln för vektorprodukt att

$$\vec{RQ} \times \vec{RP} = (-4, 4 - 4x, x - 1).$$

Således söker vi x så att

$$\frac{1}{2} \sqrt{(-4)^2 + (4 - 4x)^2 + (x - 1)^2} = 2 \iff \sqrt{17x^2 - 34x + 33} = 4.$$

Kvadrering av båda leden ger

$$17x^2 - 34x + 33 = 16 \iff 17x^2 - 34x + 17 = 0 \iff 17(x - 1)^2 = 0,$$

som har den enda lösningen $x = 1$.

Svar: $x = 1$

3. Vi konstaterar till att börja med att $\det A = -1 \neq 0$, vilket innebär att A är inverterbar. Om vi inverterar båda leden av den givna ekvationen får vi därmed

$$AX + B = A^{-1}.$$

Multiplikation av båda leden från *vänster* med A^{-1} ger

$$X + A^{-1}B = (A^{-1})^2 \iff X = (A^{-1})^2 - A^{-1}B = A^{-1}(A^{-1} - B).$$

Här har vi alltså X uttryckt i termer av A och B , och det återstår "bara" att sätta in de givna matriserna i högerledet. Det innebär alltså att vi måste

beräkna A^{-1} . Detta är dock ganska tacksamt i detta fall, eftersom A är en s.k. *övertriangulär matris* (samtlige element under huvuddiagonalen är noll).

Vi kan bestämma A^{-1} genom att lösa ett ekvationssystem med A som koeficientmatris och med ett allmänt högerled:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = y_1 \\ -x_2 + 2x_3 = y_2 \\ x_3 = y_3. \end{cases}$$

Här kan vi antingen använda Gausselimination för att se till så att de två första ekvationernas vänsterled bara innehåller x_1 respektive x_2 , eller så kan vi utnyttja att eftersom $x_3 = y_3$ så blir $x_2 = 2x_3 - y_2 = -y_2 + 2y_3$, vilket i sin tur ger $x_1 = y_1 - 2x_2 - 3x_3 = y_1 - 2(-y_2 + 2y_3) - 3y_3 = y_1 + 2y_2 - 7y_3$. Vi konstaterar att

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Detta ger

$$\begin{aligned} X = A^{-1}(A^{-1} - B) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -5 \\ 0 & -4 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 20 & -14 & -10 \\ -6 & 6 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Svar: $X = \begin{pmatrix} 20 & -14 & -10 \\ -6 & 6 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4. Vi noterar först att $\mathbf{u}$ och $\mathbf{w}$ båda har längden 1 och är ortogonala med varandra (deras skalärprodukt är noll). Den vektor $\mathbf{v}$ vi söker ska också vara av längd 1 och ortogonal mot såväl $\mathbf{u}$ som $\mathbf{w}$. En sådan vektor är t.ex. vektorprodukten $\mathbf{u} \times \mathbf{w}$. Denna vektor har dock egenskapen att $(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{u} \times \mathbf{w})$ är positivt orienterat, men vi vill att det är $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ som ska vara positivt orienterat. Men om $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ är positivt orienterat, så är även $(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ detta. Detta ger att $\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{u}$ måste vara den vektor vi söker. Vi får att

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \times \mathbf{u} &= \frac{1}{3}(-2, -1, 2) \times \frac{1}{3}(1, 2, 2) = \frac{1}{9}((-2, -1, 2) \times (1, 2, 2)) \\ &= \frac{1}{9}((-1) \cdot 2 - 2 \cdot 2, 2 \cdot 1 - (-2) \cdot 2, (-2) \cdot 2 - (-1) \cdot 1) \\ &= \frac{1}{9}(-6, 6, -3) = -\frac{1}{3}(2, -2, 1). \end{aligned}$$

Alternativt kan vi sätta $\mathbf{v} = (x, y, z)$ och sedan lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ -2x - y + 2z = 0. \end{cases}$$

Ekvationssystemet är underbestämt och har oändligt många lösningar. Dessa kan skrivas på formen

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -2t \\ z = t, \end{cases}$$

där t är ett reellt tal. Här måste t väljas så att $(x, y, z) = t(2, -2, 1)$ blir en vektor av längd 1. Eftersom $(2, -2, 1)$ är av längd $\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3$ så kan vi välja antingen $t = 1/3$ eller $t = -1/3$. Samtidigt ska $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ vara positivt orienterat, d.v.s. för den s.k. volymfunktionen ska gälla att $V(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) > 0$. Vi kan beräkna $V(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ som determinanten av den matris, vars kolonner i tur och ordning är vektorerna $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$. Eftersom

$$\begin{vmatrix} 1/3 & 2t & -2/3 \\ 2/3 & -2t & -1/3 \\ 2/3 & t & 2/3 \end{vmatrix} = \text{/* Sarrus' regel */} = -3t$$

ser vi att t måste vara negativt, d.v.s. $t = -1/3$. Alltså får vi även med denna metod att $\mathbf{v} = -\frac{1}{3}(2, -2, 1)$.

Svar: $-\frac{1}{3}(2, -2, 1)$

5. När det gäller basbyten i allmänhet så gäller att om X är en kolonnmatris, vars element är koordinaterna för en vektor $\mathbf{u}$ i basen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, och om Y är motsvarande kolonnmatris för $\mathbf{u}$'s koordinater i basen $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$, så gäller

$$X = TY, \quad (1)$$

där T är transformationsmatrisen, eller basbytesmatrisen. Denna har som sina kolonner koordinaterna för i tur och ordning $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$, d.v.s. i detta fall

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

och måste vara en inverterbar matris, för att $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ överhuvudtaget ska kunna vara en bas. Att så är fallet följer av att $\det T = 5 \neq 0$. Alternativt kan detta bevisas genom att visa att ett homogent ekvationssystem med T som koefficientmatris endast har den triviala lösningen.

Antag att $\mathbf{u}$ är en vektor som samma koordinater (x, y, z) i såväl basen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ som basen $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$. Det betyder att $Y = X$ i ekvation (1), vilket i sin tur ger att

$$X = TX \iff EX = TX \iff TX - EX = \mathbf{0} \iff (T - E)X = \mathbf{0},$$

som är ett homogent ekvationssystem med $T - E$ som koefficientmatris. Eftersom

$$T - E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

ger detta ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2z = 0 \\ -z = 0 \\ -x + 2y = 0. \end{cases}$$

Här ser vi från någon av de två första ekvationerna att vi måste ha $z = 0$. Om vi vidare sätter $y = t$ så blir $x = 2t$ tack vare den tredje ekvationen. Lösningen till systemet kan alltså tecknas som

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 0, \end{cases}$$

där t är ett godtyckligt reellt tal. Slutsatsen blir att varje vektor som är parallell med $(2, 1, 0)$ har samma koordinater i båda baserna.

Svar: Alla vektorer på formen $t(2, 1, 0)$, t reellt tal