

Linnéuniversitetet

Institutionen för Datavetenskap,

Fysik och Matematik

Karl-Olof Lindahl

Tentamen i Vektorgeometri, 1MA103, 7,5 hp

Måndagen den 30 maj 2011, klockan 8.00–13.00.

För att erhålla maximal poäng krävs en fullständig lösning, presenterad på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.

Tillåtna hjälpmedel: bifogad formelsamling

För var och en av uppgifterna nedan gäller att koordinaterna är givna i ett **ortonormerat** koordinatsystem.

1. Bestäm de värden på a för vilka följande matris är inverterbar

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 2 & a & 1 \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

(5p)

2. En vektor u har koordinaterna $(3, 1)$ i basen (e_1, e_2) . Vilka koordinater har u i basen (f_1, f_2) om $f_1 = (1, 3)$, $f_2 = (2, 4)$ i basen (e_1, e_2) ? Ange även transformationsmatrisen för basbytet. (4p+1p)

3. a) Bestäm den minsta vinkeln mellan vektorerna $n_1 = (1, 2, 1)$ and $n_2 = (-3, 1, -1)$.
b) Bestäm den minsta vinkeln mellan de båda planen $x + 2y + z = 0$ och $-3x + y - z + 2 = 0$. (4p+1p)

4. a) Ange matrisen för den ortogonala speglingen i planet $2x + y + z = 0$. (4p)
b) Bestäm spegelbilden av vektorn $u = (2, 1, 2)$. (1p)

5. Bestäm egenvärden och en ON-bas av egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(5p)

6. a) Visa att matrismultiplikation inte är kommutativ. (1p)

b) Låt $u = (1, 1, 1)$ vara en vektor i en given ON-bas. Bestäm ytterligare två vektorer v och w så att (u, v, w) bildar en bas i rummet. (Motivering krävs) (2p)

c) Är linjen $L : (x, y, z) = (2 - t, -1 - t, 2t)$ parallell med planet $\Pi : x + y + z = 0$? (Motivering krävs) (1p)

d) Härled formeln för skalärprodukt på koordinatform i en ON-bas. (1p)

7. Visa att basbytesmatrisen vid basbyte mellan två ON-baser ges av en ortogonal matris. (5p)

8. Bestäm matrisen för en linjär avbildning vars värderum är planet $\Pi : 2x - 3y + z = 0$, och vars nollrum är linjen $L : (x, y, z) = t(1, 1, 2)$. (5p)

LYCKA TILL!