

# *Vektorgeometri för gymnasister*

Per-Anders Svensson

<https://moodle.lnu.se/course/view.php?id=71458>

Fakulteten för teknik  
Linnéuniversitetet

Areor, vektorprodukter, volymer och determinanter II

# *Innehåll*

Repetition: Vektorprodukt

Volymberäkningar

Determinanter

Några räknelagar för determinanter

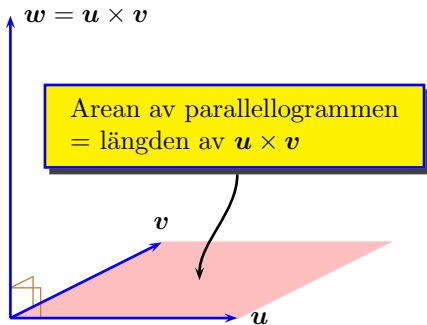
Determinanter och linjära ekvationssystem

## Repetition: Vektorprodukt

### Definition (Vektorprodukt)

Om  $\mathbf{u}$  och  $\mathbf{v}$  är två icke-parallella vektorer i rummet, så definieras deras *vektorprodukt* som den vektor  $\mathbf{w}$  som är sådan att

- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$  ( $\mathbf{w}$  är ortogonal mot både  $\mathbf{u}$  och  $\mathbf{v}$ )
- längden av  $\mathbf{w}$  är lika med arean av den parallelogram som spänns upp av  $\mathbf{u}$  och  $\mathbf{v}$
- systemet  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$  är positivt orienterat.



Vi skriver  $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ . Om  $\mathbf{u}$  och  $\mathbf{v}$  är parallella, så definieras  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  som nollvektorn  $\mathbf{0}$ .

## Sats

Om  $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3)$  och  $\mathbf{v} = (y_1, y_2, y_3)$  i en positivt orienterad ON-bas, så gäller att

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$$

i samma bas.

Vi kan här skriva varje koordinat till  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  som en *determinant*:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left( \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right).$$

Följande uppställning kan underlätta beräkningen av vektorprodukten  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ , där  $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3)$  och  $\mathbf{v} = (y_1, y_2, y_3)$ :

$$\begin{array}{cccc} x_2 & x_3 & x_1 & x_2 \\ & \diagdown & \diagup & \diagdown \\ & y_2 & y_3 & y_1 \\ & \diagup & \diagdown & \diagup \\ y_2 & y_3 & y_1 & y_2 \end{array}$$

Multiplisera korsvis och använd plustecken för de diagonaler som lutar nedåt åt höger och minustecken för de övriga.

## Volymberäkningar

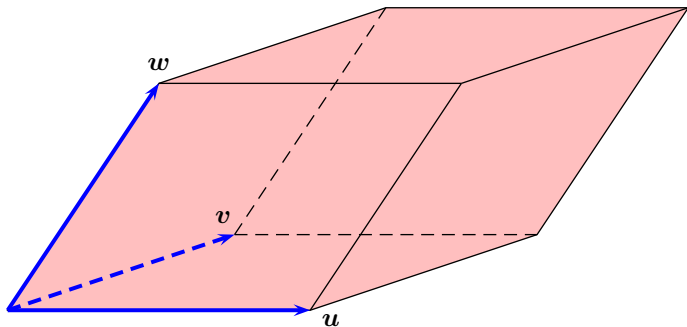
Om  $\mathbf{u} = (x_1, x_2)$  och  $\mathbf{v} = (y_1, y_2)$  är två icke-parallella vektorer i planet (med koordinaterna givna i en ON-bas), så fann vi förra gången att arean av den parallelogram som spänns upp av  $\mathbf{u}$  och  $\mathbf{v}$  kan bestämmas genom att beräkna *determinanten* av  $2 \times 2$ -matrisen

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$$

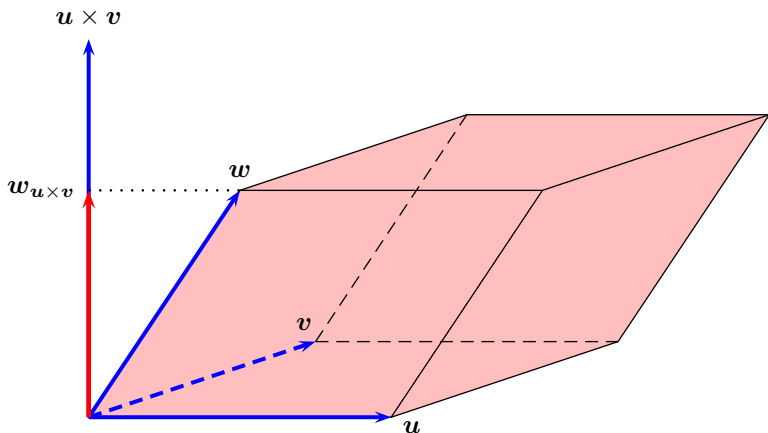
och ta absolutbeloppet av detta tal (så att resultatet blir positivt). Med andra ord ges parallelogrammens area av uttrycket

$$|x_1 y_2 - y_1 x_2|.$$

Vi ska nu studera motsvarande frågeställning i tre dimensioner; motsvarigheten till area av en parallelogram blir då *volym av en parallelepiped* (en ”sned låda”).

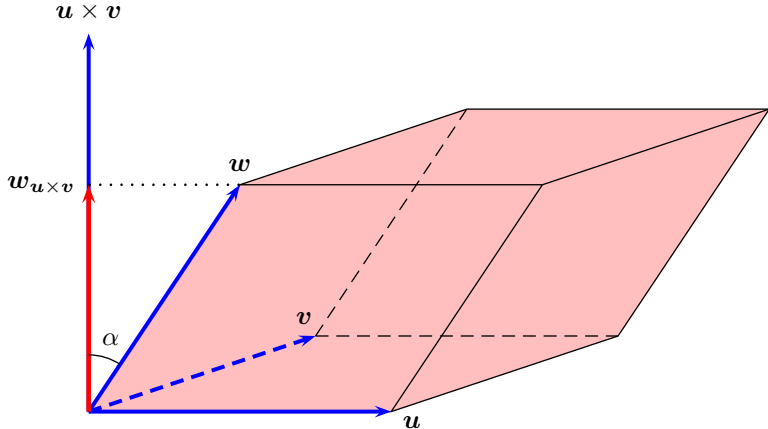


Låt  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  och  $\mathbf{w}$  vara tre vektorer i rummet. Antag att de inte alla tre ligger i ett och samma plan, d.v.s. att de är linjärt oberoende. Då spänner de upp en parallelepiped, enligt figuren ovan. I denna figur är vektorerna också valda så, att systemet  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$  är positivt orienterat, d.v.s. sett från spetsen av  $\mathbf{w}$  så sker den kortaste vridningen av  $\mathbf{u}$ , som gör att den pekar i samma riktning som  $\mathbf{v}$ , moturs.



Volymen av en parallelepiped ges som bekant av basytan gånger höjden.

- Basytan till parallelepipeden är den parallelogram som spänns upp av  $u$  och  $v$ . Arean av denna parallelogram är i sin tur lika med längden av  $u \times v$ .
- Låt  $w_{u \times v}$  beteckna den ortogonala projektionen av  $w$  på  $u \times v$ . Då ges parallelepipedens höjd av längden av  $w_{u \times v}$ .



Alltså har vi att parallelepipedens volym  $V$  kan tecknas som

$$V = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| |\mathbf{w}_{\mathbf{u} \times \mathbf{v}}|.$$

Om  $\alpha$  betecknar vinkeln mellan  $\mathbf{w}_{\mathbf{u} \times \mathbf{v}}$  och  $\mathbf{w}$ , så är  $|\mathbf{w}_{\mathbf{u} \times \mathbf{v}}| = |\mathbf{w}| \cos \alpha$ , vilket ger

$$V = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| |\mathbf{w}| \cos \alpha = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}.$$



Ovanstående resonemang bygger på att  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$  är positivt orienterat (och att  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  och  $\mathbf{w}_{\mathbf{u} \times \mathbf{v}}$  därmed pekar i samma riktning). Skulle  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$  istället vara negativt orienterat, blir enda skillnaden ett teckenbyte; volymen kommer i så fall att ges av  $V = -(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ .

### Definition (Volymfunktionen)

Om  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  är tre vektorer i rummet, så definierar vi *volymfunktionen* av  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  och  $\mathbf{w}$  som skalärprodukten av  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  och  $\mathbf{w}$ , d.v.s.

$$V(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}.$$

- Den geometriska tolkningen av  $V(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$  är alltså att den ger, sånär som på tecknet, volymen av den parallelepiped som spänns upp av  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  och  $\mathbf{w}$ .
- Systemet  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$  är positivt orienterat, om och endast om  $V(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) > 0$ ; det är negativt orienterat, om och endast om  $V(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) < 0$ .
- Om  $V(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$  så urartar den parallelepiped som spänns upp av  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  och  $\mathbf{w}$ ; den blir "platt" och får ingen volym. Detta sker när precis när  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  och  $\mathbf{w}$  alla ligger i ett och samma plan, d.v.s. när dessa vektorer är *linjärt beroende*.

Vi presenterar några räknelagar för volymfunktionen:

### Sats

Låt  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u}'$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v}'$ ,  $\mathbf{w}$  och  $\mathbf{w}'$  vara vektorer i rummet och  $s$  ett reellt tal.

Då gäller

- (i)
  - $V(\mathbf{u} + \mathbf{u}', \mathbf{v}, \mathbf{w}) = V(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + V(\mathbf{u}', \mathbf{v}, \mathbf{w})$
  - $V(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{v}', \mathbf{w}) = V(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + V(\mathbf{u}, \mathbf{v}', \mathbf{w})$
  - $V(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} + \mathbf{w}') = V(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + V(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}')$
- (ii)  $V(s\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = V(\mathbf{u}, s\mathbf{v}, \mathbf{w}) = V(\mathbf{u}, \mathbf{v}, s\mathbf{w}) = sV(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$
- (iii)  $V(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$ , om två av vektorerna  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  och  $\mathbf{w}$  är lika.

Eftersom  $V(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ , så kan formeln ovan bevisas genom att utnyttja räknelagarna för skalär- och vektorprodukt.

Notera att om  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  är linjärt beroende, så kan en av dessa vektorer, t.ex.  $\mathbf{u}$ , skrivas som en linjärkombination av de övriga:  $\mathbf{u} = a\mathbf{v} + b\mathbf{w}$ . Med hjälp av formeln i satsen ovan fås då att

$$\begin{aligned} V(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= V(a\mathbf{v} + b\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = V(a\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + V(b\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \\ &= aV(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + bV(\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

precis vad vi konstaterade på föregående sida, fast då med ett geometriskt resonemang.

Antag nu att  $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $\mathbf{v} = (y_1, y_2, y_3)$  och  $\mathbf{w} = (z_1, z_2, z_3)$  i en positivt orienterad ON-bas. Då är, till att börja med,

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \left( \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right) \\ &= (x_2y_3 - y_2x_3, x_3y_1 - y_3x_1, x_1y_2 - y_1x_2).\end{aligned}$$

Därmed blir

$$\begin{aligned}V(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} \\ &= (x_2y_3 - y_2x_3)z_1 + (x_3y_1 - y_3x_1)z_2 + (x_1y_2 - y_1x_2)z_3 \\ &= x_2y_3z_1 - y_2x_3z_1 + x_3y_1z_2 - y_3x_1z_2 + x_1y_2z_3 - y_1x_2z_3.\end{aligned}$$

Högerledet ovan ger alltså, sånär som på tecknet, volymen av den parallelepiped som spänns upp av vektorerna  $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $\mathbf{v} = (y_1, y_2, y_3)$  och  $\mathbf{w} = (z_1, z_2, z_3)$ . Detta är alltså motsvarigheten till formeln för arean av en parallelogram i planet.

I planet kopplade vi formeln för arean av en parallelogram till determinanten för en viss  $2 \times 2$ -matris. Vi gör en analog koppling vad beträffar volymen av en parallelepiped i rummet, fast matrisen ifråga blir då istället av typ  $3 \times 3$ .

# Determinanter

## Definition (Determinant av en $3 \times 3$ -matris)

Med *determinanten* av  $3 \times 3$ -matrisen

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$$

avses talet

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \\ &= x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_1 y_3 z_2 - x_2 y_1 z_3 - x_3 y_2 z_1. \end{aligned}$$

Med andra ord är  $V(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \det A$ , där  $A$  är den matris vars kolonner i tur och ordning utgörs av koordinaterna för vektorerna  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  och  $\mathbf{w}$ .

## Sarrus' regel

För att beräkna determinanten

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

kan följande uppställning användas:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & y_1 & z_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & x_3 & y_3 & z_3 \end{array}$$

Multiplicera längs med diagonalerna. Använd plustecken för de diagonalerna som lutar nedåt åt höger och minustecken för de övriga.

## Exempel

Beräkna determinanten av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

## Lösning.

Vi använder Sarrus' regel:

|   |    |   |   |    |   |
|---|----|---|---|----|---|
| 7 | -2 | 1 | 7 | -2 | 1 |
| 2 | 0  | 2 | 2 | 0  | 2 |
| 1 | 4  | 2 | 1 | 4  | 2 |

och får att

$$\begin{aligned} \det A &= 7 \cdot 0 \cdot 2 + (-2) \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 4 - 7 \cdot 2 \cdot 4 - (-2) \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 0 \cdot 1 \\ &= 0 - 4 + 8 - 56 + 8 - 0 = -44. \end{aligned}$$



## Exempel

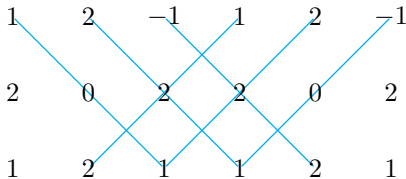
Vektorerna  $\mathbf{u} = (1, 2, 1)$ ,  $\mathbf{v} = (2, 0, 2)$  och  $\mathbf{w} = (-1, 2, 1)$  spänner upp en parallelepiped i rummet. Beräkna volymen av denna parallelepiped.

## Lösning.

Den sökta volymen ges (sånär som på tecken) av volymfunktionen

$$\begin{aligned} V(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \text{/Sarrus' regel/} \\ &= 0 + 4 + (-4) - 4 - 4 - 0 = -8 \end{aligned}$$

Den sökta volymen är därmed  $|V(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})| = |-8| = 8$ . □



## Exempel

Avgör om  $\mathbf{f}_1 = (1, 2, 3)$ ,  $\mathbf{f}_2 = (1, 2, 1)$ ,  $\mathbf{f}_3 = (1, 0, 1)$  är linjärt beroende eller oberoende.

## Lösning.

Tidigare har vi angripit liknande problem genom att lösa det homogena ekvationssystem

$$AX = O,$$

där  $A$  har som sina kolonner i tur och ordning koordinaterna för  $\mathbf{f}_1$ ,  $\mathbf{f}_2$  och  $\mathbf{f}_3$ : Om detta system endast har den triviala lösningen  $X = O$ , så är  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$  linjärt oberoende, i annat fall linjärt beroende. Vi kan nu "slippa undan" att lösa detta ekvationssystem, genom att beräkna determinanten av matrisen  $A$  ovan; vi får med hjälp av Sarrus' regel att

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

Alltså är vektorerna linjärt oberoende. (Med andra ord är  $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$  en bas för rummets vektorer.) □



## Exempel

För vilka värden på konstanten  $a$  är systemet  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$  positivt orienterat, om  $\mathbf{u} = (0, 1, 2)$ ,  $\mathbf{v} = (-1, -2, 1)$  och  $\mathbf{w} = (2, a, 2)$ ?

## Lösning.

Systemet  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$  är positivt orienterat, om och endast om  $V(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) > 0$ . Vi får att

$$V(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & a \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 12 - 2a.$$

Alltså är  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$  positivt orienterat, om och endast om  $12 - 2a > 0$ , d.v.s.  $a < 6$ . □

## Anmärkning

Om  $a > 6$  i exemplet ovan, så blir  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$  i stället negativt orienterat, medan vektorerna blir linjärt beroende, om  $a = 6$ .

## Några räknelagar för determinanter

### Sats

Låt  $A$  och  $B$  vara  $3 \times 3$ -matriser. Då gäller

- (i)  $\det A^T = \det A$
- (ii)  $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ . (*Produktlagen för determinanter*)
- (iii) Om  $A$  är inverterbar så är

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

### Bevis av (iii).

Vi utgår från att vi redan har bevisat (ii) ovan (produktlagen), och att vi därmed får använda oss av den i vårt resonemang.

För enhetsmatrisen  $E$  gäller  $\det E = 1$ . Med hjälp av produktlagen fås därmed

$$1 = \det E = \det(A^{-1}A) = \det A^{-1} \cdot \det A.$$

Alltså är  $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$ , vilket skulle bevisas.



# Determinanter och linjära ekvationssystem

För en  $3 \times 3$ -matris

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

så kallas  $(a_{11}, a_{21}, a_{31})$ ,  $(a_{12}, a_{22}, a_{32})$  och  $(a_{13}, a_{23}, a_{33})$  för matrisens *kolonnvektorer*. I samma anda kallas  $(a_{11}, a_{12}, a_{13})$ ,  $(a_{21}, a_{22}, a_{23})$  och  $(a_{31}, a_{32}, a_{33})$  för matrisens *radvektorer*.

## Exempel

Kolonnvektorerna till matrisen

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ -2 & 10 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

ges av  $(0, -2, 2)$ ,  $(-1, 10, 1)$  och  $(8, 4, -2)$ , medan radvektorerna utgörs av  $(0, -1, 8)$ ,  $(-2, 10, 4)$  och  $(2, 1, -2)$ .

Vi återknyter till formeln

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

för determinanten av inversen till en matris. Med tanke på hur denna formel ser ut, ligger det nära till hands att fråga sig:

*Vad händer om  $\det A = 0$ ? Då blir det ju noll i nämnaren i högerledet?*

Poängen är att  *$\det A$  inte kan vara noll, om  $A$  är inverterbar!*

## Sats

*Låt  $A$  vara en  $3 \times 3$ -matris. Då är följande påståenden ekvivalenta:*

- (i) Ekvationssystemet  $AX = B$  har en entydig lösning för varje högerled  $B$*
- (ii)  $A$  är inverterbar*
- (iii) Kolonnvektorerna till  $A$  är linjärt oberoende*
- (iv) Radvektorerna till  $A$  är linjärt oberoende*
- (v)  $\det A \neq 0$ .*

## Exempel

I ett exempel från den allra första föreläsningen skulle vi bestämma för vilka värden på konstanterna  $a$  och  $b$  som ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + ay - 2z = 3 \\ 2x + y - 3z = b \\ -x \quad \quad + z = 1 \end{cases}$$

hade

- exakt en lösning
- oändligt många lösningar
- ingen lösning alls.

Det enda verktyget vi hade då var Gausselimination. Nackdelen med Gausselimination är att det kan bli litet trixiga räkningar, eftersom vissa av koefficienterna i ekvationerna inte är kända tal; det är lätt hänt att man räknar fel. Men tack vare föregående sats kan vi nu förenkla räkningarna!

Låt nämligen  $A$  vara systemets koefficientmatris. Då vet vi att ekvationssystemet har entydig lösning, om och endast om  $A$  är inverterbar, vilket i sin tur inträffar om och endast om  $\det A \neq 0$ .

Eftersom

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & a & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a - 1,$$

har ekvationssystemet exakt en lösning om  $a - 1 \neq 0$ , d.v.s. om  $a \neq 1$ . För dessa värden på  $a$ , spelar det alltså ingen roll vilket värde  $b$  har.

För att ta reda på vad som händer om  $a = 1$  så gör vi på samma sätt som vi gjorde i exemplet från den första föreläsningen, d.v.s. vi löser det ekvationssystem

$$\begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ 2x + y - 3z = b \\ -x \quad \quad + z = 1 \end{cases}$$

vi får, om vi sätter  $a = 1$ . (Vi fick då att det finns oändligt många lösningar om  $b = 2$ , men inga alls om  $b \neq 2$ .)

## Anmärkning

Räknelagarna för determinanter och satsen som kopplar determinanter till lösbarheten hos ekvationssystem, formulerade vi enbart för  $3 \times 3$ -matriser. De gäller dock oavkortade även för  $2 \times 2$ -matriser.

Om  $A$  och  $B$  är  $2 \times 2$ -matriser, så gäller alltså t.ex. produktlagen  $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ , och att ett ekvationssystem med  $A$  som koefficientmatris har entydig lösning, om och endast om  $\det A \neq 0$ .

## Exempel

För att ta reda på när ekvationssystemet

$$\begin{cases} ax + 4y = 2 \\ 2x + (2 + a)y = -1 \end{cases}$$

har entydighet lösning, beräknar vi först determinanten av koefficientmatrisen

$$\begin{vmatrix} a & 4 \\ 2 & 2 + a \end{vmatrix} = a(2 + a) - 4 \cdot 2 = a^2 + 2a - 8.$$

Vi vet att entydig lösning föreligger för alla värden på  $a$  som är sådana att  $a^2 + 2a - 8 \neq 0$ .

Eftersom

$$\begin{aligned}a^2 + 2a - 8 = 0 &\iff a = -1 \pm \sqrt{(-1)^2 + 8} = -1 \pm \sqrt{9} = -1 \pm 3 \\&\iff a = -4 \text{ eller } a = 2,\end{aligned}$$

så kan vi konstatera att

*Ekvationssystemet har entydig lösning för alla  $a$ , utom  $a = -4$  och  $a = 2$ .*

Utred på egen hand vad som händer om  $a = -4$  eller  $a = 2$ .