

SKRIVNING I VEKTORGEOMETRI

Delkurs 1, 2024

Om inget annat uttryckligen sägs, kan koordinaterna för en vektor i antas vara givna i en ON-bas. Baser i rummet kan dessutom antas vara positivt orienterade.

1. Bestäm *samtliga* vektorer som är ortogonala mot både $\mathbf{u} = (2, 1, 3)$ och $\mathbf{v} = (-1, -1, 2)$.
2. För vilka värden på konstanterna a och b har ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = b \\ x_1 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3ax_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$$

exakt en lösning, oändligt många lösningar, respektive ingen lösning alls?

3. Bestäm volymen av den tetraeder vars hörn utgörs av de fyra punkterna $P = (1, 2, 3)$, $Q = (5, 2, 2)$, $R = (7, 3, 1)$ och $S = (4, 3, 4)$.
4. Bestäm konstanterna a och b så att

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

blir inversen till matrisen

$$\begin{pmatrix} a-b & b \\ a & a+b \end{pmatrix}.$$

5. Låt $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ och $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ vara baser för rummets vektorer, och antag att sambandet mellan dessa båda baser kan skrivas som

$$\begin{cases} \mathbf{f}_1 = 2a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{f}_2 = b\mathbf{e}_1 - c\mathbf{e}_2 - a\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{f}_3 = -c\mathbf{e}_1 - a\mathbf{e}_2 + 2b\mathbf{e}_3, \end{cases}$$

för några konstanter a , b och c . Antag att vektorn $\mathbf{u}$ har koordinaterna $(2, -1, 3)$ i basen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ och koordinaterna $(1, -2, 2)$ i basen $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$. Bestäm a , b och c .

SKRIVNING I VEKTORGEOMETRI

Delkurs 1, 2024

Lösningsförslag

1. Om $\mathbf{x} = (a, b, c)$ är en vektor som är ortogonal mot både $\mathbf{u} = (2, 1, 3)$ och $\mathbf{v} = (-1, -1, 2)$, så måste skalärprodukterna $\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}$ och $\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}$ båda vara noll, d.v.s.

$$\begin{cases} 2a + b + 3c = 0 \\ -a - b + 2c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -b + 7c = 0 \\ -a - b + 2c = 0. \end{cases}$$

Ansättningen $c = t$ ger $b = 7c = 7t$ och $a = -b + 2c = -7t + 2t = -5t$, d.v.s. lösningen till ekvationssystemet kan på parameterform tecknas som

$$\begin{cases} a = -5t \\ b = 7t \\ c = t. \end{cases}$$

Detta innebär att varje vektor på formen $t(-5, 7, 1)$ är ortogonal mot både $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.

Alternativ lösning: Från definitionen av vektorprodukt vet vi att $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ är en vektor som är ortogonal mot såväl $\mathbf{u}$ som $\mathbf{v}$. Därmed måste varje vektor som är ortogonal mot både $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara parallell med $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Vi har att

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= (2, 1, 3) \times (-1, -1, 2) \\ &= (1 \cdot 2 - 3 \cdot (-1), 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 2, 2 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1)) \\ &= (5, -7, -1), \end{aligned}$$

så varje vektor på formen $s(5, -7, -1)$, där s är ett godtyckligt reellt tal, är ortogonal mot både $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. Detta överensstämmer med resultatet vi fick med den första lösningsmetoden; notera att $(-5, 7, 1)$ och $(5, -7, -1)$ pekar åt rakt motsatta håll.

Svar: $t(-5, 7, 1)$, t reellt tal

2. Vi låter

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3a & 3 \end{pmatrix}$$

vara ekvationssystemets koefficientmatris. Ekvationssystemet kommer att ha en entydigt bestämd lösning för alla värden på a som gör att $\det A \neq 0$.

Med hjälp av Sarrus' regel finner vi efter litet räkningar att

$$\det A = 3 - 3a,$$

och alltså är $\det A = 0$ om och endast om $a = 1$. Slutsatsen blir att en entydig lösning existerar närhelst $a \neq 1$.

För att ta reda på vad som händer när $a = 1$ sätter vi in detta värde på a i ekvationssystemet, vilket ger

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + 2x_3 = b \\ x_1 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 4 \end{array} \right. \xrightarrow{-2} \left\{ \begin{array}{l} x_2 - x_3 = b - 2 \\ x_1 + 3x_3 = 2 \\ 3x_2 - 3x_3 = 0 \end{array} \right.$$

Den tredje ekvationen är här ekvivalent med $x_2 - x_3 = 0$, och en jämförelse med den första ekvationen ger då att vi måste ha $b = 2$ för att lösningar överhuvudtaget ska existera. Vi får för detta värde på b det underbestämda systemet

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \end{array} \right.$$

som har oändligt många lösningar. Om å andra sidan $b \neq 2$ så saknas lösningar till ekvationssystemet.

Svar: Entydig lösning om $a \neq 1$; oändligt många lösningar om $a = 1$, $b = 2$; inga lösningar om $a = 1$, $b \neq 2$.

3. Vi noterar först att tetraedern spänns upp av vektorerna $\overrightarrow{PQ} = (4, 0, -1)$, $\overrightarrow{PR} = (6, 1, -2)$ och $\overrightarrow{PS} = (3, 1, 1)$. Den volym vi söker är lika med en sjättedel av volymen av den parallelepiped som spänns upp av dessa tre vektorer. Denna volym fås i sin tur (sånär som på tecken) genom att beräkna den determinant, vars kolonner utgörs av koordinaterna för ovan nämnda vektorer, d.v.s.

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Om Sarrus' regel tillämpas på denna determinant fås resultatet

$$4 \cdot 1 \cdot 1 + 6 \cdot 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 \cdot (-2) - 4 \cdot 1 \cdot (-2) - 6 \cdot 0 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot (-1) = 9.$$

Detta betyder att tetraedern i fråga har volymen $9/6 = 3/2$.

Svar: $3/2$

4. Vi döper de givna matriserna enligt

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{respektive} \quad B = \begin{pmatrix} a-b & b \\ a & a+b \end{pmatrix}.$$

För att B ska kunna vara inversen till A , måste

$$AB = E.$$

Eftersom

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-b & b \\ a & a+b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3(a-b) - a & 3b - (a+b) \\ -2(a-b) + a & -2b + (a+b) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2a - 3b & -a + 2b \\ -a + 2b & a - b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

måste vara lika med enhetsmatrisen, så måste

$$\begin{cases} 2a - 3b = 1 \\ -a + 2b = 0 \\ a - b = 1. \end{cases}$$

Mittenekvationen säger att $a = 2b$. Sätter vi in detta i någon av de övriga två ekvationerna så får vi i båda fallen att $b = 1$. Därmed blir $a = 2b = 2$.

Alternativ lösning: Beräkna först A^{-1} , genom att lösa ekvationssystemet $AX = Y$ för allmänt högerled Y :

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = y_1 \\ -2x_1 + x_2 = y_2. \end{cases}$$

Adderas de två ekvationerna fås att $x_1 = y_1 + y_2$. Sätts detta in i den andra ekvationen får vi

$$x_2 = 2x_1 + y_2 = 2(y_1 + y_2) + y_2 = 2y_1 + 3y_2,$$

och alltså har vi

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = 2y_1 + 3y_2. \end{cases}$$

Således är

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Jämför vi denna matris med

$$B = \begin{pmatrix} a-b & b \\ a & a+b \end{pmatrix}$$

så får vi $a = 2$ och $b = 1$, precis som tidigare.

Svar: $a = 2, b = 1$

5. I basen (e_1, e_2, e_3) har vektorn u koordinaterna $(2, -1, 3)$, och representeras därmed av kolonnmatrisen

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

i denna bas. På samma vis får vi att $\mathbf{u}$ i basen $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ representeras av kolonnmatrisen

$$Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Sambandet mellan kolonnmatriserna X och Y ges av

$$X = TY,$$

där T är transformationsmatrisen som beskriver basbytet från $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ till $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$. Vi bildar T genom att som dess kolonner i tur och ordning välja koordinaterna för vektorerna $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ och $\mathbf{f}_3$ i basen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Eftersom $\mathbf{f}_1 = (2a, b, c)$, $\mathbf{f}_2 = (b, -c, -a)$ och $\mathbf{f}_3 = (-c, -a, 2b)$ blir alltså

$$T = \begin{pmatrix} 2a & b & -c \\ b & -c & -a \\ c & -a & 2b \end{pmatrix}.$$

Därmed är

$$\begin{aligned} TY &= \begin{pmatrix} 2a & b & -c \\ b & -c & -a \\ c & -a & 2b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2a \cdot 1 + b \cdot (-2) + (-c) \cdot 2 \\ b \cdot 1 + (-c) \cdot (-2) + (-a) \cdot 2 \\ c \cdot 1 + (-a) \cdot (-2) + 2b \cdot 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2a - 2b - 2c \\ -2a + b + 2c \\ 2a + 4b + c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sambandet $TY = X$ kan därmed skrivas som ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2a - 2b - 2c = 2 \\ -2a + b + 2c = -1 \\ 2a + 4b + c = 3. \end{cases}$$

Här kan vi, om vi så önskar, först dividera båda leden i den första ekvationen med 2, innan vi löser systemet med Gausselimination:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a - b - c = 1 & \begin{array}{c} \boxed{} \\ \leftarrow 2 \end{array} \\ -2a + b + 2c = -1 & \leftarrow 2 \\ 2a + 4b + c = 3 & \leftarrow -2 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{ccc} a - b - c = 1 \\ -b & = 1 \\ 6b + 3c = 1. \end{array} \right.$$

Av den mittersta ekvationen får vi direkt att $b = -1$, vilket insatt i den tredje ekvationen ger

$$-6 + 3c = 1 \iff 3c = 7 \iff c = \frac{7}{3}.$$

Med $b = -1$ och $c = 7/3$ insatt i den första ekvationen får vi slutligen

$$a - (-1) - \frac{7}{3} = 1 \iff a = \frac{7}{3}.$$

Svar: $a = \frac{7}{3}, b = -1, c = \frac{7}{3}$