

SKRIVNING I VEKTORGEOMETRI

Delkurs 1, 2023

Om inget annat uttryckligen sägs, kan koordinaterna för en vektor i antas vara givna i en ON-bas. Baser i rummet kan dessutom antas vara positivt orienterade.

1. Beräkna volymen av den parallelepiped som spänns upp av vektorerna $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$, där $\mathbf{u} = (3, 1, 2)$, $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$ och $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$.
2. Låt
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
 - (a) Beräkna A^{-1} .
 - (b) Lös ekvationssystemen $AX = B$ och $AX = C$.
3. I en given bas $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ för rummets vektorer så har vi $\mathbf{f}_1 = (1, 0, 2)$, $\mathbf{f}_2 = (2, 1, 1)$ och $\mathbf{f}_3 = (0, -1, 1)$. Visa att $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ också är en bas för rummets vektorer. Vilka koordinater har $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ i denna bas?
4. Punkterna $P = (a, 2, 1)$, $Q = (1, 0, 1)$ och $R = (2, 1, 1)$ bildar en triangel i rummet. För vilka värden på a har denna triangel arean 10?
5. För vilka värden på konstanterna a och b har ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = b \\ 2x_1 + x_2 + ax_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

exakt en lösning, oändligt många lösningar respektive inga lösningar alls?

SKRIVNING I VEKTORGEOMETRI

Delkurs 1, 2023

Lösningsförslag

1. Vi beräknar först $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$, där $\mathbf{u} = (3, 1, 2)$ och $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$. Med hjälp av uppställningen

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 1 & \\ & \diagdown & \diagup & \diagdown & \diagup \\ & 2 & 3 & 1 & 2 \end{array}$$

får vi att

$$\mathbf{w} = (1 \cdot 3 - 2 \cdot 2, 2 \cdot 1 - 3 \cdot 3, 3 \cdot 2 - 1 \cdot 1) = (-1, -7, 5).$$

Volymen av den parallelepiped som spänns upp av $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ är nu lika med värdet av den determinant, som har $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ som sina kolonnvektorer. Den volym vi söker ges alltså av

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -7 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 75.$$

Här kan determinanten beräknas t.ex. med hjälp av Sarrus' regel: I schemat

$$\begin{array}{ccccccc} 3 & 1 & -1 & 3 & 1 & -1 & \\ & \diagdown & \diagup & \diagdown & \diagup & \diagdown & \diagup \\ 1 & 2 & -7 & 1 & 2 & -7 & \\ & \diagdown & \diagup & \diagdown & \diagup & \diagdown & \diagup \\ 2 & 3 & 5 & 2 & 3 & 5 & \end{array}$$

multiplikerar man längs med diagonalerna och använder plustecken för de diagonaler som lutar nedåt åt höger och minustecken för de övriga.

I just detta fall kan dock parallelepipedens volym bestämmas, utan att man behöver beräkna ovanstående determinant. Enligt definitionen av vektorprodukt är nämligen $|\mathbf{w}|$ lika med arean av den parallelogram som spänns upp av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. Denna parallelogram kan vi se som basytan i den parallelepiped vi vill beräkna volymen av. Vidare säger definitionen av vektorprodukt, att $\mathbf{w}$ är ortogonal mot såväl $\mathbf{u}$ som $\mathbf{v}$, vilket innebär att $|\mathbf{w}|$ är också lika med höjden i parallelepiped. Alltså kan den sökta volymen alternativt beräknas som

$$\text{basytan} \cdot \text{höjden} = |\mathbf{w}| \cdot |\mathbf{w}| = |\mathbf{w}|^2 = (-1)^2 + (-7)^2 + 5^2 = 75.$$

Svar: 75 volymenheter

2. (a) För att beräkna A^{-1} löser vi ett ekvationssystem $AX = Y$ med A som koefficientmatris och Y som ett allmänt högerled:

$$\begin{cases} -x_1 & + 2x_3 = y_1 \\ -x_1 + 3x_2 & = y_2 \\ & -2x_2 + x_3 = y_3 \end{cases} \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \right] \\ \leftarrow \\ -1 \end{array}$$

$$\iff \begin{cases} -x_1 & + 2x_3 = y_1 \\ 3x_2 - 2x_3 = -y_1 + y_2 \\ -2x_2 + x_3 = y_3 \end{cases}$$

Här kan det vara en god idé att multiplicera andra ekvationen med 2 och den tredje med 3 innan vi fortsätter, för att på så vis slippa undan bråktalet i beräkningarna:

$$\begin{cases} -x_1 & + 2x_3 = y_1 \\ 6x_2 - 4x_3 = -2y_1 + 2y_2 \\ -6x_2 + 3x_3 = y_3 \end{cases} \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \right] \\ \leftarrow \\ 3y_3 \end{array}$$

$$\iff \begin{cases} -x_1 & + 2x_3 = y_1 \\ 6x_2 - 4x_3 = -2y_1 + 2y_2 \\ -x_3 = -2y_1 + 2y_2 + 3y_3 \end{cases} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\iff \begin{cases} -x_1 & = -3y_1 + 4y_2 + 6y_3 \\ 6x_2 & = 6y_1 - 6y_2 - 12y_3 \\ -x_3 & = -2y_1 + 2y_2 + 3y_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 & = 3y_1 - 4y_2 - 6y_3 \\ x_2 & = y_1 - y_2 - 2y_3 \\ x_3 & = 2y_1 - 2y_2 - 3y_3 \end{cases}$$

Genom att läsa av koefficientmatrisen till högerleden i ovanstående ekvationssystem kan vi nu konstatera att

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -6 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

- (b) Ekvationssystemen kan lösas med hjälp av Gausselimination, var för sig, om man så önskar. Men detta blir litet som att uppfinna hjulet på nytt, i och med att vi i deluppgift (a) redan har beräknat A^{-1} och därmed kan teckna lösningarna på matrisform enligt

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -6 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

respektive

$$X = A^{-1}C = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -6 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Svar: (a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -6 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ (b) $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

respektive $X = A^{-1}C = \begin{pmatrix} 16 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$

3. Vektorerna $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ och $\mathbf{f}_3$ bildar en bas för rummets vektorer, om och endast om de är linjärt oberoende. Detta är i sin tur fallet, om och endast om den determinant, vars kolonnvektorer består av $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ och $\mathbf{f}_3$, är skild från noll (ty då spänner $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ och $\mathbf{f}_3$ upp en parallelepiped med positiv volym; vektorerna ligger alltså inte alla tre i ett och samma plan). Med hjälp av t.ex. Sarrus' regel, finner vi att värdet av sagda determinant är

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Detta bevisar att $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ duger som en bas för rummets vektorer.

Vektorn $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ har koordinaterna $(1, -1, 1)$ i den ursprungliga basen. Om $\mathbf{u} = (y_1, y_2, y_3)$ i den nya basen $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$, så ges sambandet mellan de nya och gamla koordinaterna av

$$X = TY,$$

där

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

och där T är transformationsmatrisen (eller basbytesmatrisen); dess kolonnvektorer ges (från vänster till höger) av $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ och $\mathbf{f}_3$, d.v.s.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Genom att lösa ekvationssystemet $TY = X$, t.ex. med Gausselimination:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{rcl} y_1 + 2y_2 & = & 1 \\ y_2 - y_3 & = & -1 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 & = & 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \leftarrow_2 \\ \leftarrow_3 \end{array} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} y_1 + 2y_2 & = & 1 \\ y_2 - y_3 & = & -1 \\ -3y_2 + y_3 & = & -1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \leftarrow_3 \end{array} \\ \iff \left\{ \begin{array}{rcl} y_1 + 2y_2 & = & 1 \\ y_2 - y_3 & = & -1 \\ -2y_3 & = & -4 \end{array} \right\} \\ \iff \left\{ \begin{array}{l} y_1 = -1 \\ y_2 = 1 \\ y_3 = 2, \end{array} \right. \end{aligned}$$

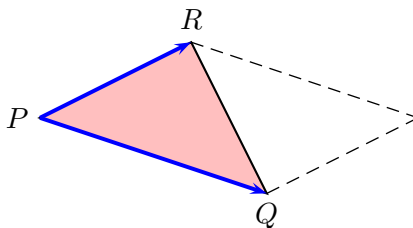
så finner vi att $\mathbf{u} = -\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + 2\mathbf{f}_3$, eller med andra ord att $\mathbf{u} = (-1, 1, 2)$ i basen $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$.

Svar: $(-1, 1, 2)$.

4. Triangelns area är lika med halva arean av den parallelogram som spänns upp av vektorerna

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \overrightarrow{PQ} = (1, 0, 1) - (a, 2, 1) = (1 - a, -2, 0) \quad \text{och} \\ \mathbf{v} &= \overrightarrow{PR} = (2, 1, 1) - (a, 2, 1) = (2 - a, -1, 0).\end{aligned}$$

Vi söker alltså a så att denna parallelogram får arean $2 \cdot 10 = 20$.



Arean av parallelogrammen ges av längden av vektorprodukten $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Genom att beräkna vektorprodukten (t.ex. på liknande sätt som i uppgift 1), får vi

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (0, 0, 3 - a),$$

vilket innebär att $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (3 - a)^2} = |3 - a|$.

Vi har därmed att lösa ekvationen $|3 - a| = 20$. Detta leder till två olika fall, beroende på om tecknet (positivt eller negativt) hos uttrycket $3 - a$. Om $3 - a \geq 0$ så är $|3 - a| = 3 - a$ vilket ger att

$$|3 - a| = 20 \iff 3 - a = 20 \iff a = -17.$$

Om istället $3 - a < 0$ så är $|3 - a| = -(3 - a) = a - 3$ och i detta fall blir

$$|3 - a| = 20 \iff a - 3 = 20 \iff a = 23.$$

Svar: $a = -17$ eller $a = 23$.

5. Ekvationssystemet kan på matrisform skrivas $AX = B$, där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & a \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} b \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ekvationssystemet har entydig lösning, om och endast om $\det A \neq 0$ (ty då är A inverterbar och den entydiga lösningen kan då på matrisform skrivas $X = A^{-1}B$). Med hjälp av t.ex. Sarrus' regel finner vi att

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & a \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 10a - 20,$$

så vi ser att $\det A = 0$ precis när $a = 2$. Det betyder alltså att om $a \neq 2$ så har ekvationssystemet exakt en lösning.

Vad händer då om $a = 2$? Då vet vi att det *inte* kan finnas exakt en lösning. Alternativen är att det antingen finns oändligt många lösningar, eller inga lösningar alls; det hela beror på vilket värde b har. För att ta reda på hur b påverkar antalet lösningar, försöker vi lösa ekvationssystemet (i fallet då $a = 2$). Gausselimination ger

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = b \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \end{array} \right. &\begin{array}{l} \xrightarrow{-2} \\ \xrightarrow{-3} \end{array} \iff \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = b \\ -5x_2 - 2x_3 = 2 - 2b \\ -10x_2 - 4x_3 = 1 - 3b \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = b \\ -5x_2 - 2x_3 = 2 - 2b \\ 0 = -3 + b \end{array} \right. \end{aligned}$$

Vi ser här att om $b \neq 3$, så är den sista ekvationen inte sann, och ekvationssystemet kommer i detta fall att sakna lösning. Om å andra sidan $b = 3$, så får man det underbestämda ekvationssystemet

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \\ -5x_2 - 2x_3 = -4, \end{array} \right.$$

som har oändligt många lösningar.

Svar: Exakt en lösning om $a \neq 2$; oändligt många lösningar om $a = 2$ och $b = 3$; lösningar saknas om $a = 2$ och $b \neq 3$.