

SKRIVNING I VEKTORGEOMETRI

Delkurs 1, 2022

Om inget annat uttryckligen sägs, kan koordinaterna för en vektor i antas vara givna i en ON-bas. Baser i rummet kan dessutom antas vara positivt orienterade.

1. Bestäm volymen av den tetraeder i rummet, som har sina hörn i de fyra punkterna $P = (-1, 2, 0)$, $Q = (2, 1, -3)$, $R = (1, 0, 1)$ och $S = (3, -2, 3)$. Får man en till volymen större eller mindre tetraeder, om hörnet i punkten S ersätts av origo?

2. (a) Visa att matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

är inverterbar och beräkna dess invers.

- (b) Lös ekvationssystemet $AX = B$, där $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. För vilka värden på konstanterna a och b har ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3x + ay - z = 1 \\ -x + 2y + z = 2 \\ 3x \quad \quad + z = b \end{cases}$$

exakt en lösning, oändligt många lösningar respektive inga lösningar alls?

4. (a) För vilka värden på konstanten a bildar vektorerna $\mathbf{f}_1 = (a, 2, 1)$, $\mathbf{f}_2 = (3, a, -1)$ och $\mathbf{f}_3 = (1, 2, 1)$ en bas för rummets vektorer?
- (b) Vilket värde har konstanten a , om vektorn $\mathbf{u} = (5, 0, 2)$ efter ett byte till basen $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ får koordinaterna $(1, 2, 3)$?

5. En kvadratisk matris A kallas *idempotent*, om $A^2 = A$.

- (a) Visa att

$$A = \begin{pmatrix} x & -x \\ x-1 & 1-x \end{pmatrix}$$

är en idempotent matris, oavsett värdet på x .

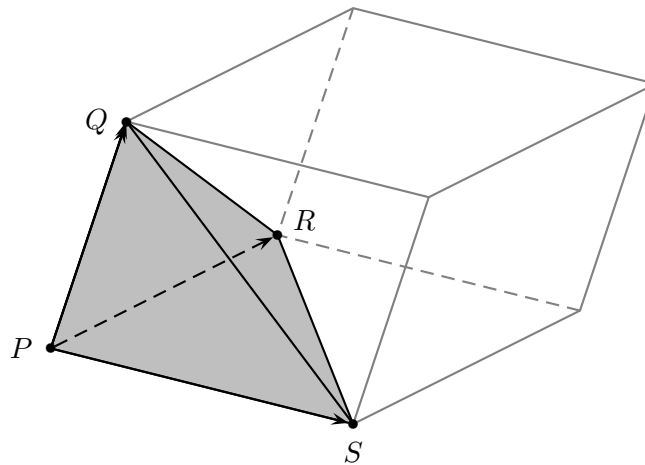
- (b) Beräkna B^2 , där $B = 2A - E$.

SKRIVNING I VEKTORGEOMETRI

Delkurs 1, 2022

Lösningsförslag

1. Den första tetraedern spänns upp av de tre vektorerna $\overrightarrow{PQ} = (3, -1, -3)$, $\overrightarrow{PR} = (2, -2, 1)$ och $\overrightarrow{PS} = (4, -4, 3)$. Dess volym är lika med en sjättedel av volymen av den parallelepiped som spänns upp av samma vektorer.



Parallelepipedens volym kan, bortsett från tecknet, beräknas som determinanten av den matris, som har $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ och $\overrightarrow{PS}$ som sina kolonnvektorer. Med hjälp av Sarrus' regel finner vi att

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -4 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -4,$$

vilket innebär att tetraederns volym därmed är $4/6$ volymenheter (vilket kan förkortas till $2/3$, om man så önskar).

Om vi ersätter S med origo, så får vi en tetraeder, vars volym är lika med en sjättedel av volymen hos den parallelepiped som spänns upp av $\overrightarrow{OP} = (-1, 2, 0)$, $\overrightarrow{OQ} = (2, 1, -3)$ och $\overrightarrow{OR} = (1, 0, 1)$. På liknande vis som ovan får vi denna volym som determinanten

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -11.$$

Motsvarande tetraedervolym blir här $11/6$ volymenheter. Vi kan konstatera att vi får en tetraeder med större volym, om hörnet S ersätts av origo.

Svar: $2/3$ volymenheter; volymen blir större

2. (a) Enklast bevisar man att matrisen är inverterbar, genom att bekräfta att dess determinant är nollskild. Sarrus' regel ger oss att

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

vilket garanterar att A^{-1} existerar.¹

För att beräkna A^{-1} , löser vi ett ekvationssystem med allmänt högerled, och där koefficientmatrisen utgörs av A . Gausselimination ger till att börja med

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = y_1 \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 = y_2 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = y_3 \end{cases} \quad \begin{array}{c} \leftarrow -2 \\ \leftarrow + \end{array} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = y_1 \\ -x_2 + x_3 = -2y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 + y_3 \end{cases} \end{aligned}$$

Här kan vi, innan vi fortsätter med eliminerandet, byta plats på den andra och tredje ekvationen. Därefter fortsätter vi med den successiva eliminationen:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = y_1 \\ x_2 = y_1 + y_3 \\ -x_2 + x_3 = -2y_1 + y_2 \end{cases} \quad \begin{array}{c} \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = y_1 \\ x_2 = y_1 + y_3 \\ x_3 = -y_1 + y_2 + y_3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 2x_1 = y_1 + y_2 + 2y_3 \\ x_2 = y_1 + y_3 \\ x_3 = -y_1 + y_2 + y_3 \end{cases} \end{aligned}$$

Avlutningsvis divideras båda leden i den första ekvationen med 2, vilket leder till

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + y_3 \\ x_2 = y_1 + y_3 \\ x_3 = -y_1 + y_2 + y_3 \end{cases}$$

Genom att läsa av koefficientmatrisen i högerleden, finner vi att

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

¹Vi *måste* dock inte genomföra detta determinanttest, innan vi ger oss på att försöka beräkna A^{-1} , utan det är helt acceptabelt att direkt ge sig på att beräkna inversen. Hittar vi en invers, bevisar detta på samma gång att den existerar!

(b) Ekvationssystemets lösning kan fås som

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Givetvis kan man alternativt lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x - y - z = 2 \\ 4x - 3y - z = 0 \\ -2x + 2y + z = 1, \end{cases}$$

men det blir då litet som att uppfinna hjulet på nytt, i och med att den Gausselimination man genomför blir väsentligen densamma som när man beräknar A^{-1} i deluppgift (a).

Svar: (a) $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

3. För att det ska finnas exakt en lösning, är det såväl nödvändigt som tillräckligt, att koefficientmatrisens determinant är nollskild. Koefficientmatrisen ges av

$$A = \begin{pmatrix} 3 & a & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

och med hjälp av Sarrus' regel finner vi att

$$\det A = 0 \iff \begin{vmatrix} 3 & a & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff 12 + 4a = 0 \iff a = -3.$$

Så länge vi undviker det "farliga" värdet $a = -3$, kommer vi alltid att ha exakt en lösning (och hur denna lösning i själva verket ser ut, beror på vilka värden a och b har, men det är vi inte intresserade av just här).

Om $a = -3$ så kan det alltså *inte* vara så, att det bara finns en enda lösning. Istället finns det antingen ingen lösning alls, eller oändligt många, beroende på vilket värde b har. Vi kikar därför närmare på hur ekvationssystemet ser ut, just för $a = -3$:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x - 3y - z = 1 \leftarrow 3 \\ -x + 2y + z = 2 \leftarrow 1 \\ 3x \quad \quad + z = b \leftarrow 3 \end{cases} &\iff \begin{cases} 3y + 2z = 7 \\ x + 2y - z = 2 \\ 6y + 4z = 6 + b \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 6y + 4z = 14 \\ x + 2y - z = 2 \\ 6y + 4z = 6 + b. \end{cases} \end{aligned}$$

Här har vi i det sista steget multiplicerat båda leden i den första ekvationen med 2. På så vis får den första och den tredje ekvationen identiska vänsterled, så för att lösningar överhuvudtaget ska existera, måste därmed även motsvarande högerled vara lika, d.v.s.

$$14 = 6 + b \iff b = 8.$$

Om $b \neq 8$ motsäger alltså den första och den tredje ekvationen varandra, vilket innebär att lösningar saknas. Med $b = 8$ fås å andra sidan det underbestämda systemet

$$\begin{cases} 6y + 4z = 14 \\ x + 2y - z = 2, \end{cases}$$

som har oändligt många lösningar.

Svar: Ekvationssystemet har entydig lösning om $a \neq -3$, oändligt många lösningar om $a = -3$, $b = 8$, medan lösning saknas om $a = -3$, $b \neq 8$.

4. (a) För att $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ ska bilda en bas för rummets vektorer, får de inte vara linjärt beroende. Detta kan vi geometriskt se som att de alla tre inte får ligga i ett och samma plan, d.v.s. den parallelepiped som dessa tre vektorer spänner upp får inte vara ”platt”.

Analogt med uppgift 1 kan vi bestämma volymen av denna parallelepiped (sånär som på tecknet) genom att beräkna determinanten av den matris som har $\mathbf{f}_1 = (a, 2, 1)$, $\mathbf{f}_2 = (3, a, -1)$ och $\mathbf{f}_3 = (1, 2, 1)$ som sina kolonnvektorer. Vi får, med hjälp av Sarrus’ regel, att

$$\begin{vmatrix} a & 3 & 1 \\ 2 & a & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + a - 2.$$

Därmed blir $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ och $\mathbf{f}_3$ linjärt beroende, om och endast om

$$a^2 + a - 2 = 0 \iff a = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}.$$

De ”farliga” värdena på a är alltså $a = 1$ och $a = -2$; då blir vektorerna linjärt beroende och kommer inte att duga som bas för rummets vektorer. För alla andra värden på a bildar dock vektorerna en bas.

- (b) Om vi byter från den ursprungliga, givna basen (som vi kan kalla $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$), till basen $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ (där vi alltså utgår från att a inte har något av de ”farliga” värdena $a = 1$ eller $a = -2$), så kan vi beskriva hur koordinaterna hos en vektor ändras i de olika baserna med hjälp av transformationsmatrisen (alias basbytesmatrisen)

$$T = \begin{pmatrix} a & 3 & 1 \\ 2 & a & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

vars kolonnvektorer är i tur och ordning $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ och $\mathbf{f}_3$. Om X är den kolonnvektor som representerar en vektor $\mathbf{u}$ i den ursprungliga basen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, och Y motsvarande representerande vektor i basen $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$, så ges sambandet mellan X och Y av

$$X = TY.$$

Eftersom $\mathbf{u} = (5, 0, 2)$ i basen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ och $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$ i basen $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$, så skall vi alltså ha

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 3 & 1 \\ 2 & a & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+9 \\ 2a+8 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Detta ger villkoren $a+9=5$ och $2a+8=0$ på a , som båda är uppfyllda för $a=-4$.

Svar: (a) $a \neq 1$ och $a \neq -2$ (b) $a = -4$

5. (a) Vi beräknar matrisprodukten och får

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} x & -x \\ x-1 & 1-x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & -x \\ x-1 & 1-x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x^2 - x(x-1) & -x^2 - x(1-x) \\ x(x-1) + (1-x)(x-1) & -x(x-1) + (1-x)^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x^2 - x^2 + x & -x^2 - x + x^2 \\ x^2 - x + x - 1 - x^2 + x & -x^2 - x + 1 - 2x + x^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & -x \\ x-1 & 1-x \end{pmatrix} = A, \end{aligned}$$

vilket bevisar att A är idempotent, oavsett vilket värde x har.

(b) Med hjälp av matrisalgebra²

$$\begin{aligned} B^2 &= (2A - E)^2 = (2A - E)(2A - E) \\ &= (2A)^2 - (2A)E - E(2A) + E^2 \\ &= 4A^2 - 2A - 2A + E = 4A^2 - 4A + E. \end{aligned}$$

Eftersom A är idempotent så gäller $A^2 = A$, vilket gör att högerledet ovan kan förenklas till

$$4A^2 - 4A + E = 4A - 4A + E = E.$$

²Här kan det kanske tyckas omständligt att skriva $(2A-E)^2$ som $(2A-E)(2A-E)$, men vi tar det säkra före det osäkra, då kvadreringsregeln ej gäller allmänt för matriser (på grund av att matrismultiplikation inte är kommutativ). Allt vi i allmänhet kan säga (om X och Y är kvadratiska matriser av samma ordning) är att $(X-Y)^2 = X^2 - XY - YX + Y^2$.

En alternativ lösning (med mer "råräkning") är att först beräkna

$$B = 2A - E = 2 \begin{pmatrix} x & -x \\ x-1 & 1-x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-1 & -2x \\ 2x-2 & 1-2x \end{pmatrix},$$

för att därefter beräkna

$$B^2 = \begin{pmatrix} 2x-1 & -2x \\ 2x-2 & 1-2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x-1 & -2x \\ 2x-2 & 1-2x \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Svar: (b) E