

## SKRIVNING I VEKTORGEOMETRI

### Delkurs 1, 2021

---

Om inget annat uttryckligen sägs, kan koordinaterna för en vektor i antas vara givna i en ON-bas. Baser i rummet kan dessutom antas vara positivt orienterade.

---

1. Beräkna volymen av den tetraeder som har sina hörn i de fyra punkterna  $P = (1, -2, 1)$ ,  $Q = (2, 1, 1)$ ,  $R = (3, 0, 4)$  och  $S = (1, -2, -3)$ .
2. Betrakta de tre vektorerna  $\mathbf{u} = (1, 0, 2)$ ,  $\mathbf{v} = (1, 1, 2)$  och  $\mathbf{w} = (0, 1, 1)$  i rummet. Genom att på olika sätt välja två av dessa vektorer kan vi spänna upp tre olika parallelogram  $P_1$ ,  $P_2$  och  $P_3$  i rummet; säg att  $P_1$  spänns upp av  $\mathbf{u}$  och  $\mathbf{v}$ , att  $P_2$  spänns av  $\mathbf{u}$  och  $\mathbf{w}$ , och att  $P_3$  spänns upp av  $\mathbf{v}$  och  $\mathbf{w}$ . Vilken av dessa tre parallelogram har störst area?
3. För vilka värden på  $a$  är matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -4 & a & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & a \end{pmatrix}$$

*inte* inverterbar? Avgör för vart och ett av dessa värden på  $a$ , om ekvationssystemet

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

saknar lösning eller har oändligt många.

4. Bestäm samtliga vektorer  $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3)$  sådana att  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{w}$ , där  $\mathbf{v} = (1, -1, 2)$  och  $\mathbf{w} = (-1, 1, 1)$ .
5. Låt  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  vara en bas för rummets vektorer, och låt  $\mathbf{u}$  vara vektorn med koordinaterna  $(5, 2, 1)$  i denna bas. Antag att

$$\begin{cases} \mathbf{f}_1 = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 - c\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{f}_2 = b\mathbf{e}_1 - c\mathbf{e}_2 - a\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{f}_3 = -c\mathbf{e}_1 + a\mathbf{e}_2 + b\mathbf{e}_3 \end{cases}$$

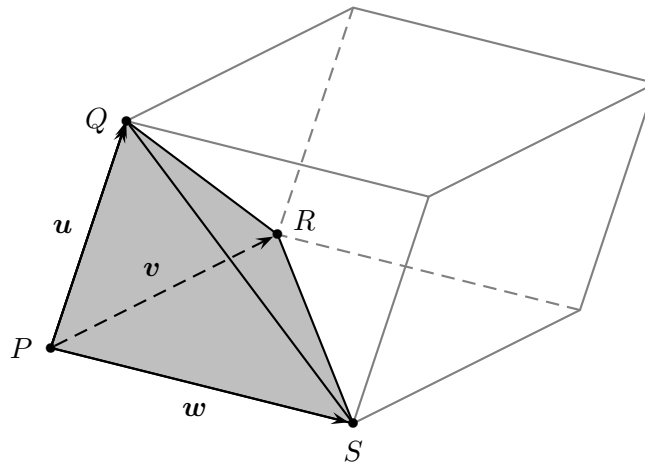
också bildar en bas för rummets vektorer, och att  $\mathbf{u}$  i denna bas har koordinaterna  $(1, -2, 1)$ . Bestäm  $a$ ,  $b$  och  $c$ .

## SKRIVNING I VEKTORGEOMETRI

Delkurs 1, 2021

### Lösningsförslag

1. Vi bildar de tre vektorerna  $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ} = (1, 3, 0)$ ,  $\mathbf{v} = \overrightarrow{PR} = (2, 2, 3)$  och  $\mathbf{w} = \overrightarrow{PS} = (0, 0, -4)$ . Dessa tre vektorer spänner upp en parallelepiped, och den tetraeder vi söker har en volym lika med en sjättedel av denna parallelepipedens volym.



Parallelepipedens volym kan, bortsett från tecknet, beräknas som determinanten av den matris, som har  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  och  $\mathbf{w}$  som sina kolonnvektorer. Med hjälp av Sarrus' regel finner vi att

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 16,$$

vilket innebär att tetraederns volym därmed är  $16/6$  volymsenheter (vilket kan förkortas till  $8/3$ , om man så önskar).

**Svar:**  $8/3$

2. Arealen av den parallelogram som två vektorer spänner upp i rummet, är lika med längden av vektorernas vektorprodukt. Så vad vi behöver göra är att ta reda på vilken av de tre vektorerna  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{u} \times \mathbf{w}$  och  $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$  som är längst.

Med  $\mathbf{u} = (1, 0, 2)$ ,  $\mathbf{v} = (1, 1, 2)$  och  $\mathbf{w} = (0, 1, 1)$  och formeln för vektorprodukt så blir

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= (1, 0, 2) \times (1, 1, 2) = (-2, 0, 1), \\ \mathbf{u} \times \mathbf{w} &= (1, 0, 2) \times (0, 1, 1) = (-2, -1, 1) \text{ och} \\ \mathbf{v} \times \mathbf{w} &= (1, 1, 2) \times (0, 1, 1) = (-1, -1, 1), \end{aligned}$$

som är vektorer av respektive längd

$$\begin{aligned} |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| &= \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{5}, \\ |\mathbf{u} \times \mathbf{w}| &= \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6} \text{ och} \\ |\mathbf{v} \times \mathbf{w}| &= \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Alltså är den parallelogram som spänns upp av  $\mathbf{u}$  och  $\mathbf{w}$ , d.v.s.  $P_2$ , den som har störst area.

**Svar:**  $P_2$

3. Den givna matrisen är inte inverterbar, om och endast om dess determinant är lika med noll. Därför löser vi ekvationen  $\det A = 0$  för att ta reda vilket eller vilka värden på konstanten  $a$  som är "farliga". Med hjälp av Sarrus' regel får vi att

$$\begin{vmatrix} -4 & a & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & a \end{vmatrix} = 0 \iff -a^2 - 10a - 16 = 0 \iff a^2 + 10a + 16 = 0$$

$$\iff a = -5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 16} = -5 \pm 3,$$

vilket innebär att matrisen inte är inverterbar om  $a = -8$  eller  $a = -2$ .

I vart och ett av dessa två fall kan det *inte* vara så, att ett ekvationssystem med  $A$  som koefficientmatris har entydig lösning. Istället har systemet antingen oändligt många lösningar eller inga lösningar alls. Vi undersöker nu vilket av dessa fall som är aktuellt när  $a = -8$  respektive  $a = -2$ .

För  $a = -8$  har vi att lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} -4x - 8y + 2z = 2 \\ x + 2y - z = -1 \\ 2x + 4y - 8z = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} -2z = -2 \\ x + 2y - z = 2 \\ -6z = 0. \end{cases}$$

Den första och den tredje ekvationen motsäger här varandra, så lösningar saknas i detta fall.

Om  $a = -2$  så har vi istället att lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} -4x - 2y + 2z = 2 \\ x + 2y - z = -1 \\ 2x + 4y - 2z = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} 6y - 2z = -2 \\ x + 2y - z = -1 \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Vi får ett underbestämt system, som har oändligt många lösningar.

**Svar:**  $a = -8$  (lösning saknas) och  $a = -2$  (oändligt många lösningar)

4. Från formeln för vektorprodukt finner vi att

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3) \times (1, -1, 2) = (2x_2 + x_3, x_3 - 2x_1, -x_1 - x_2).$$

Vi vill att högerledet ska bli lika med vektorn  $\mathbf{w} = (-1, 1, 1)$ , d.v.s. att

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x_2 + x_3 & = & -1 \\ -2x_1 & + & x_3 = 1 \\ -x_1 - x_2 & = & 1 \end{array} \right. \xrightarrow{-2} \left\{ \begin{array}{rcl} 2x_2 + x_3 & = & -1 \\ 2x_2 + x_3 & = & -1 \\ -x_1 - x_2 & = & 1. \end{array} \right.$$

Här noterar vi att två första ekvationerna är identiska. Detta ger att systemet har oändligt många lösningar. Sätter vi t.ex.  $x_2 = t$ , så blir  $x_3 = -1 - 2x_2 = -1 - 2t$  och  $x_1 = -1 - x_2 = -1 - t$ , vilket visar att varje vektor på formen  $(x_1, x_2, x_3) = (-1 - t, t, -1 - 2t)$  uppfyller ekvationen.

**Svar:**  $(x_1, x_2, x_3) = (-1 - t, t, -1 - 2t)$  där  $t$  är ett godtyckligt reellt tal

5. Låt  $X$  och  $Y$  vara de kolonnvektorer vars element är koordinaterna för  $\mathbf{u}$  i basen  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  respektive  $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ , d.v.s.

$$X = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Om vi gör ett basbyte från basen  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  till basen  $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ , så kan sambandet mellan  $X$  och  $Y$  skrivas

$$X = TY,$$

där  $T$  är transformationsmatrisen (eller basbytesmatrisen, som man också kan säga). Denna matris har som sina kolonner koordinaterna för de nya basvektorerna  $\mathbf{f}_1$ ,  $\mathbf{f}_2$  och  $\mathbf{f}_3$ , uttryckta i den gamla basen  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ . Från uppgiftens beskrivning får vi att  $\mathbf{f}_1 = (a, b, -c)$ ,  $\mathbf{f}_2 = (b, -c, -a)$  och  $\mathbf{f}_3 = (-c, a, b)$ , vilket innebär att

$$T = \begin{pmatrix} a & b & -c \\ b & -c & a \\ -c & -a & b \end{pmatrix}.$$

Därmed ställs vi inför att lösa ekvationen

$$\begin{aligned} TY = X &\iff \begin{pmatrix} a & b & -c \\ b & -c & a \\ -c & -a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a - 2b - c \\ b + 2c + a \\ -c + 2a + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a - 2b - c = 5 \\ a + b + 2c = 2 \\ 2a + b - c = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Vi löser detta ekvationssystem med hjälp av Gausselimination:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{rrc} a - 2b - c = 5 & \xrightarrow{\quad} & \\ a + b + 2c = 2 & \xleftarrow{-1} & \\ 2a + b - c = 1 & \xleftarrow{-2} & \end{array} \right\} &\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrc} a - 2b - c = 5 & & \\ 3b + 3c = -3 & \xleftarrow{-3} & \\ 5b + c = -9 & & \end{array} \right\} \\ &\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrc} a - 2b - c = 5 & & \\ -12b = 24 & & \\ 5b + c = -9. & & \end{array} \right. \end{aligned}$$

Den mellersta ekvationen ger oss att  $b = -2$ . Detta värde insatt i den sista ekvationen ger att  $c = -9 - 5b = -9 + 10 = 1$ . Med  $b = -2$  och  $c = 1$  blir slutligen  $a = 5 + 2b + c = 5 - 4 + 1 = 2$ . Således

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \\ c = 1. \end{cases}$$

(För dessa värden på  $a$ ,  $b$  och  $c$  blir för övrigt  $\det T = 21 \neq 0$ , vilket visar att  $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$  faktiskt är en bas för rummets vektorer.)

**Svar:**  $a = 2$ ,  $b = -2$ ,  $c = 1$