

SKRIVNING I VEKTORGEOMETRI

Delkurs 1 2020

Om inget annat uttryckligen sägs, kan koordinaterna för en vektor i antas vara givna i en ON-bas. Baser i rummet kan dessutom antas vara positivt orienterade.

1. Visa att om $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ är en bas för rummets vektorer, så är även $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ en bas, om

$$\begin{cases} \mathbf{f}_1 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{f}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3. \end{cases}$$

Bestäm även koordinaterna för $\mathbf{u} = 4\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_3$ i basen $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$.

2. Bestäm de värden på de reella talen a och b , som gör att ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 4y + 3z = 2 \\ x + y + z = b \\ ax + 2y + az = 2 \end{cases}$$

får exakt en lösning, oändligt många lösningar respektive inga lösningar alls.

3. Bestäm samtliga vektorer av längd 1 som är ortogonala mot båda vektorerna $(1, -2, 2)$ och $(2, -2, 3)$.

4. Låt $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ och $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Beräkna $(A - B)^{-1}$.

(b) Lös matrisekvationen $AX = B(X + C)$.

5. För vilka värden på det reella talet a har den tetraeder, vars hörn utgörs av punkterna $(0, 0, 2)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, -1)$ och $(3, a, 1)$ volymen 2?

SKRIVNING I VEKTORGEOMETRI

Delkurs 1 2020

Lösningsförslag

1. Vi bildar den matris S vars kolonner i tur och ordning består av koordinaterna för vektorerna $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ och $\mathbf{f}_3$:

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Om $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ är en bas, så måste denna matris vara inverterbar, vilket vi i sin tur kan kontrollera genom att beräkna dess determinant. Eftersom

$$\det S = 2 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 1 = 4 \neq 0,$$

är S inverterbar, vilket bevisar påståendet om att $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ är en bas.

Vi vet att $\mathbf{u} = (4, 2, -4)$ i basen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Om $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3)$ i basen $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$, så gäller sambandet

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix},$$

vilket innebär att vi erhåller $\mathbf{u}$'s koordinater i basen $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$, genom att lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases} \begin{matrix} \xleftarrow{-2} \\ \xleftarrow{-1} \\ \hline \end{matrix} \iff \begin{cases} -x_2 - 3x_3 = 12 \\ x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases} \begin{matrix} \xleftarrow{+} \\ \hline \end{matrix} \iff \begin{cases} -4x_3 = 18 \\ x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4. \end{cases}$$

Vi får $x_3 = 18/(-4) = -9/2$, vilket medför att $x_2 = 6 + x_3 = 6 - 9/2 = 3/2$ och $x_1 = -4 - x_2 - 2x_3 = -4 - 3/2 + 9 = 7/2$. Alltså har $\mathbf{u}$ koordinaterna $(7/2, 3/2, -9/2)$ i basen $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$.

Svar: $\frac{1}{2}(7, 3, -9)$

2. Koefficientmatrisen till ekvationssystemet ges av

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ a & 2 & a \end{pmatrix}.$$

Med

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad Y = \begin{pmatrix} 2 \\ b \\ 2 \end{pmatrix}$$

så kan ekvationssystemet skrivas på matrisform som

$$AX = Y,$$

och det kommer att finnas exakt en lösning precis i de fall då

$$\det A \neq 0.$$

Determinanten av A kan beräknas t.ex. med hjälp av Sarrus' regel. Vi erhåller i så fall

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ a & 2 & a \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot a + 4 \cdot 1 \cdot a + 3 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 2 - 4 \cdot 1 \cdot a - 3 \cdot 1 \cdot a \\ = -2a + 4$$

d.v.s.

$$\det A = 0 \iff -2a + 4 = 0 \iff a = 2.$$

Således finns entydig lösning, om $a \neq 2$.

Vad händer om $a = 2$? Vi får då ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 4y + 3z = 2 \\ x + y + z = b \\ 2x + 2y + 2z = 2. \end{cases}$$

Om vi dividerar den sista ekvationen med 2, så får vi en ekvation

$$x + y + z = 1,$$

med samma vänsterled som i den andra ekvationen. Detta innebär att vi kommer att få oändligt många lösningar om $a = 2$ och $b = 1$, ty då säger den andra och den tredje ekvationen samma sak, och vi får ett underbestämt ekvationssystem. Om å andra sidan $a = 2$ men $b \neq 1$ så kommer den andra och den tredje ekvationen motsäga varandra, vilket innebär att lösning saknas.

Svar: Entydig lösning om $a \neq 2$. Oändligt många lösningar om $a = 2$, $b = 1$. Lösning saknas om $a = 2$, $b \neq 1$.

3. Sätt $\mathbf{u} = (1, -2, 2)$ och $\mathbf{v} = (2, -2, 3)$. Vi söker $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ så att $|\mathbf{x}| = 1$ och $\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = 0$. Att de båda skalärprodukterna $\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}$ och $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}$ ska vara noll betyder att

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Sätter vi $x_3 = 2t$ i den sista ekvationen, så följer från denna att $2x_2 = x_3 = 2t$, d.v.s. $x_2 = t$. Med $x_2 = t$ och $x_3 = 2t$ insatt i den första ekvationen blir därmed $x_1 = 2x_2 - 2x_3 = 2t - 4t = -2t$. Detta visar att varje vektor på formen $t(-2, 1, 2)$ är ortogonal mot både $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.

Det återstår att finna de värden på t som gör att $\mathbf{x} = t(-2, 1, 2)$ blir en vektor av längd 1. Vi finner att

$$|t(-2, 1, 2)| = 1 \iff |t|\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} = 1 \iff |t|\sqrt{9} = 1 \\ \iff t = \pm \frac{1}{3}.$$

Alltså uppfyller de två vektorerna $\pm \frac{1}{3}(-2, 1, 2)$ de ställda kraven.

Svar: $\pm \frac{1}{3}(-2, 1, 2)$

4. (a) Vi skall beräkna inversen till

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Detta görs genom att lösa ett ekvationssystem med allmänt högerled och med $A - B$ som koefficientmatris:

$$\begin{cases} -x_3 = y_1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = y_2 \\ x_2 + 3x_3 = y_3. \end{cases}$$

Vi får direkt $x_3 = -y_1$ från den första ekvationen, och därmed fås från den tredje ekvationen att $x_2 = y_3 - 3x_3 = 3y_1 + y_3$, varmed den andra ekvationen ger $x_1 = y_2 + x_2 + 2x_3 = y_2 + (3y_1 + y_3) - 2y_1 = y_1 + y_2 + y_3$. Således har vi

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 + y_3 \\ x_2 = 3y_1 + y_3 \\ x_3 = -y_1, \end{cases}$$

d.v.s.

$$(A - B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (b) Vi börjar med att lösa ut X ur ekvationen:

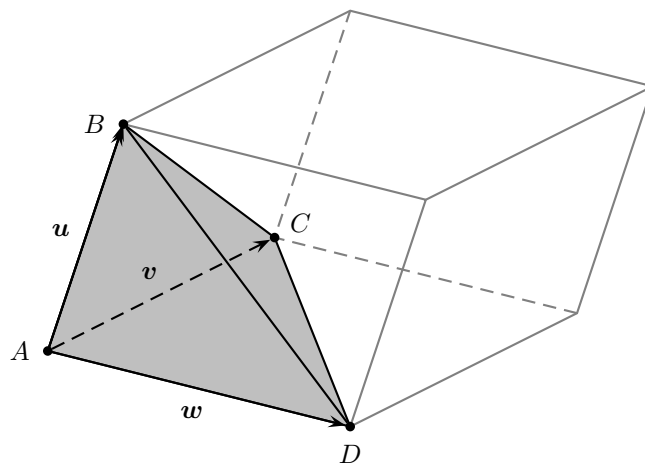
$$\begin{aligned} AX = B(X + C) &\iff AX = BX + BC \iff AX - BX = BC \\ &\iff (A - B)X = BC \iff X = (A - B)^{-1}BC. \end{aligned}$$

Med hjälp av resultatet av deluppgift (a) får vi att

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 11 & 2 \\ 10 & 3 & 10 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Svar: (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $X = \begin{pmatrix} 6 & 11 & 2 \\ 10 & 3 & 10 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

5. Sätt $A = (0, 0, 2)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (1, 0, -1)$ och $D = (3, a, 1)$. Volymen av den tetraeder som har sina fyra hörn i dessa punkter är lika med en sjättedel av volymen av den parallelepiped som spänns upp av vektorerna $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB} = (0, 1, -2)$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{AC} = (1, 0, -3)$ och $\mathbf{w} = \overrightarrow{AD} = (3, a, -1)$, se figuren nedan. Det betyder att vi ska finna de värden på a som gör att denna volym blir lika med $6 \cdot 2 = 12$.



Parallelepipedens volym är (bortsett från tecknet) lika med determinanten av den matris, som har $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ som sina kolonnvektorer. Med hjälp av Sarrus' regel finner vi att

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & a \\ -2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -2(a + 4),$$

har vi alltså att lösa ekvationerna

$$-2(a + 4) = 12 \quad \text{och} \quad -2(a + 4) = -12.$$

Den vänstra ekvationen har lösningen $a = -10$ medan den högra har lösningen $a = 2$.

Svar: $a = -10$ och $a = 2$