

Vektorgeometri för gymnasister

Per-Anders Svensson

<https://moodle.lnu.se/course/view.php?id=71458>

Fakulteten för teknik
Linnéuniversitetet

Areor, vektorprodukter, volymer och determinanter I

Innehåll

Skalärprodukt och ON-baser - en repetition

Arean av en parallelogram

Orientering av vektorer

Vektorprodukt

Skalärprodukt och ON-baser - en repetition

Skalärprodukt. Om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är två vektorer, båda skilda från nollvektorn, så definieras *skalärprodukten* av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ som det reella talet

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \alpha,$$

där α är vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. Om någon av $\mathbf{u}$ eller $\mathbf{v}$ är nollvektorn, så sätter vi $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Ortogonal vektorer. Två vektorer kallas *ortogonal*, om deras skalärprodukt är noll.

ON-bas. En *ortonormerad bas* (ON-bas) $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ för rummets vektorer är en bas sådan att $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0$ om $i \neq j$, samt $|\mathbf{e}_i| = 1$ för alla i . (Basvektorerna är parvis ortogonala och har alla längden 1.) Om $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3)$ och $\mathbf{v} = (y_1, y_2, y_3)$ är två vektorer, med koordinaterna givna i en ON-bas, så är

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \quad \text{och} \quad |\mathbf{u}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Exempel

Låt $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ vara en vektor i planet. Vi frågar oss hur många vektorer $\mathbf{w}$ som är

- ortogonala mot $\mathbf{u}$, och
- lika långa som $\mathbf{u}$.

Vi inser att det kan bara finnas två alternativ på hur $\mathbf{w}$ kan se ut; antingen är $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1$ eller $\mathbf{w} = \mathbf{w}_2$ i figuren till höger. Av figuren ser vi dessutom att $\mathbf{w}_1 = -\mathbf{w}_2$.

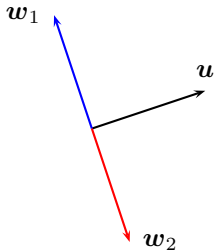
Antag nu att $\mathbf{u} = (x_1, x_2)$ i en given ON-bas. Då är $\mathbf{w}_1 = (x_2, -x_1)$ en vektor som

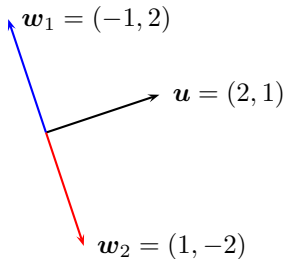
- är ortogonal mot $\mathbf{u}$, ty

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}_1 = (x_1, x_2) \cdot (x_2, -x_1) = x_1x_2 + x_2(-x_1) = x_1x_2 - x_1x_2 = 0$$

- har samma längd som $\mathbf{u}$, ty

$$|\mathbf{w}_1| = \sqrt{x_2^2 + (-x_1)^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = |\mathbf{u}|.$$





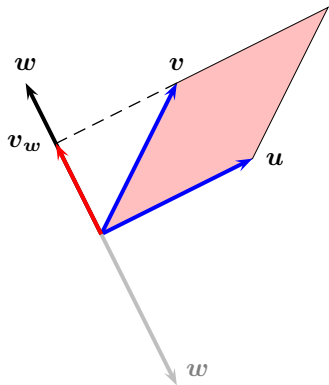
Alltså är $\mathbf{w}_1 = (x_2, -x_1)$ en av de två vektorer som är ortogonal mot $\mathbf{u} = (x_1, x_2)$. Den andra vektorn är därmed

$$\mathbf{w}_2 = -\mathbf{w}_1 = -(x_2, -x_1) = (-x_2, x_1).$$

Så om t.ex. $\mathbf{u} = (2, 1)$, så är $\mathbf{w}_1 = (-1, 2)$ och $\mathbf{w}_2 = (1, -2)$ de två vektorer som både är ortogonala mot $\mathbf{u}$ och har samma längd som $\mathbf{u}$.

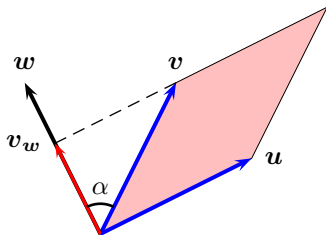
Areal av en parallelogram

Antag att $\mathbf{u} = (x_1, x_2)$ och $\mathbf{v} = (y_1, y_2)$ i en ON-bas för planet. Om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ inte är parallella, så spänner de upp en parallelogram ("sned rektangel"). Vi ska beräkna arean av denna parallelogram.



Från geometrin vet vi att arean av en parallelogram är lika med basen gånger höjden. I vår parallelogram kan vi se det som om basen ges av $|\mathbf{u}|$, men hur uttrycker vi höjden med hjälp av vektorer? Låt $\mathbf{w}$ vara en vektor som är ortogonal mot $\mathbf{u}$, och som har samma längd som $\mathbf{u}$. Som vi såg i föregående exempel finns det två alternativ för $\mathbf{w}$.

Låt $\mathbf{v}_w$ vara den ortogonala projektionen av $\mathbf{v}$ på $\mathbf{w}$. Då ges parallelogrammens höjd av $|\mathbf{v}_w|$. I figuren är $\mathbf{w}$ vald så att och $\mathbf{v}_w$ och $\mathbf{w}$ är lika riktade; vi måste dock inte välja $\mathbf{w}$ på detta vis.



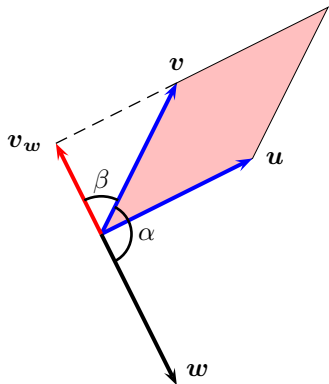
Vi har alltså att parallelogrammens area A ges av

$$A = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}_w| = |\mathbf{w}| |\mathbf{v}_w|,$$

där vi i sista likheten har utnyttjat att $\mathbf{u}$ och $\mathbf{w}$ har samma längd. Om $\mathbf{w}$ och $\mathbf{v}_w$ är lika riktade, så är $|\mathbf{v}_w| = |\mathbf{v}| \cos \alpha$, där α är vinkeln mellan $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$. Därmed blir

$$A = |\mathbf{w}| |\mathbf{v}_w| = |\mathbf{w}| |\mathbf{v}| \cos \alpha,$$

vilket vi känner igen som skalärprodukten av $\mathbf{w}$ och $\mathbf{v}$.



I det fall då w och v_w istället är motsatt riktade, så blir

$$A = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}_w| = |\mathbf{w}| |\mathbf{v}| \cos \beta,$$

där β är vinkeln mellan v och v_w . Om α som tidigare betecknar vinkeln mellan v och w , så är $\beta = 180^\circ - \alpha$ och därmed $\cos \beta = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$. Alltså är

$$A = -|\mathbf{w}| |\mathbf{v}| \cos \alpha,$$

vilket är skalärprodukten av v och w , fast med omvänt tecken.

I informella ordalag får vi alltså arean av parallelogrammen genom att beräkna en viss skalärprodukt, och justera tecknet så att resultatet blir ett positivt tal (eftersom det ju är en area vi beräknar).

Hur kommer då formeln för arean av den parallelogram se ut i termer av koordinaterna för de vektorer $\mathbf{u} = (x_1, x_2)$ och $\mathbf{v} = (y_1, y_2)$ som spänner upp den?

Från det tidigare exemplet fann vi att om $\mathbf{u} = (x_1, x_2)$ så har en vektor $\mathbf{w}$, som är ortogonal mot och av samma längd som $\mathbf{u}$, antingen koordinaterna $(-x_2, x_1)$ eller $(x_2, -x_1)$. Med hjälp av formeln för skalärprodukt får vi därmed att vi antingen har

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (y_1, y_2) \cdot (-x_2, x_1) = y_1(-x_2) + y_2x_1 = x_1y_2 - x_2y_1$$

eller

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (y_1, y_2) \cdot (x_2, -x_1) = y_1x_2 + y_2(-x_1) = -(x_1y_2 - x_2y_1)$$

Vi får följande resultat:

Sats

Om $\mathbf{u} = (x_1, x_2)$ och $\mathbf{v} = (y_1, y_2)$ i en ON-bas för planet, så ges arean av den parallelogram som spänns upp av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ av

$$|x_1y_2 - x_2y_1|.$$

Vi beräknar alltså $x_1y_2 - x_2y_1$ och tar absolutbeloppet av detta tal, d.v.s. byter tecken på det, om det skulle råka vara negativt.

Exempel

Beräkna arean av den parallelogram i planet som spänns upp av vektorerna $\mathbf{u} = (2, 1)$ och $\mathbf{v} = (7, 3)$. Koordinaterna är givna i en ON-bas.

Lösning.

Med beteckningarna $\mathbf{u} = (x_1, x_2)$ och $\mathbf{v} = (y_1, y_2)$ så blir

$$x_1y_2 - x_2y_1 = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 7 = -1.$$

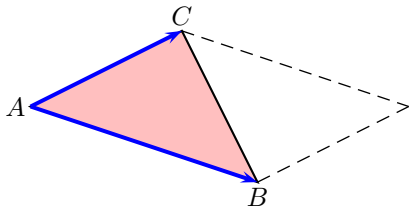
Alltså ges den sökta arean av $|-1| = 1$.



Exempel

En triangel i planet har sina hörn i punkterna $A = (-1, 1)$, $B = (2, 0)$ och $C = (1, 2)$. Vi ska bestämma arean av denna triangel.

(Koordinatsystemet är ortonormerat.)



Triangelns area ges av halva arean av den parallelogram som spänns upp av vektorerna $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$. Vi har

$$\overrightarrow{AB} = (2, 0) - (-1, 1) = (3, -1) = (x_1, x_2) \quad \text{och}$$

$$\overrightarrow{AC} = (1, 2) - (-1, 1) = (2, 1) = (y_1, y_2).$$

Därmed ges triangelns area av

$$\frac{|x_1 y_2 - x_2 y_1|}{2} = \frac{|3 \cdot 1 - (-1) \cdot 2|}{2} = \frac{5}{2}.$$

Talet $x_1y_2 - x_2y_1$, som förekommer i formeln för hur man beräknar arean av den parallelogram som spänns upp av vektorerna $\mathbf{u} = (x_1, x_2)$ och $\mathbf{v} = (y_1, y_2)$, dyker upp i många andra sammanhang än i det geometriska problem vi har studerat ovan.

Eftersom detta tal därmed är så pass viktigt, har man tilldelat det ett speciellt namn:

Definition (Determinant av 2×2 -matris)

Givet en 2×2 -matris

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$$

så kallas talet $x_1y_2 - y_1x_2$ för *determinanten* av matrisen A och betecknas $\det A$. En alternativ beteckning för determinanten är

$$\det A = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Anmärkning

Notera att matrisen A ovan har koordinaterna för $\mathbf{u} = (x_1, x_2)$ och $\mathbf{v} = (y_1, y_2)$ som sina kolonner.

Exempel

Låt

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 10 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Då är

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 - 2 \cdot 5 = -6,$$

$$\det B = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 10 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 3 - 0 \cdot 10 = -3 \quad \text{och}$$

$$\det C = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-2) - 1 \cdot 4 = 0.$$

Det går att generalisera begreppet determinant till att inte enbart omfatta 2×2 -matriser. Senare i kursen ska vi se att värdet av en determinant för en kvadratisk matris avslöjar ifall matrisen är inverterbar eller inte.

Orientering av vektorer

Vi ska inom kort införa ännu ett sätt att multiplicera vektorer med varandra, vid sidan av skalärprodukt. Denna nya typ av produkt, s.k. *vektorprodukt*, kan dock endast definieras för vektorer i *rummet*.

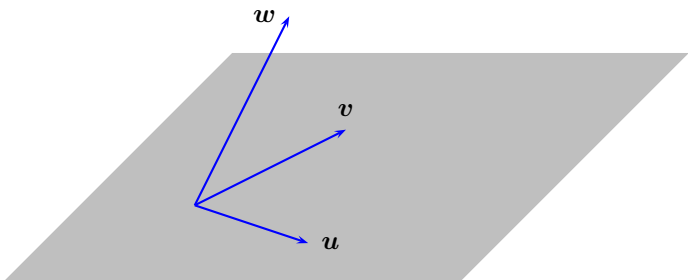
Innan vi definierar vad som menas med vektorprodukt, behöver vi införa ett sätt att kunna skilja på höger och vänster (så att säga).

Definition (Orientering av vektorer)

Låt $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ vara tre vektorer i rummet, som inte alla ligger i ett och samma plan (d.v.s. $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ är linjärt oberoende). Vi säger att $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ utgör ett *positivt orienterat system*, om den minsta vridning av $\mathbf{u}$, som gör att denna vektor kommer att peka i samma riktning som $\mathbf{v}$, sker *moturs* om man betraktar $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ från spetsen av $\mathbf{w}$.

Om vridningen av $\mathbf{u}$ istället sker *medurs*, säger man att systemet $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ är *negativt orienterat*.

Exempel



I figuren ovan är systemet $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ positivt orienterat. Systemet $(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w})$ är dock negativt orienterat (sett från spetsen $\mathbf{w}$ så kommer den minsta vridning av $\mathbf{v}$, som gör att den pekar i samma riktning som $\mathbf{u}$, att ske *medurs*). Systemet $(\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{u})$ är också negativt orienterat, ty sett från spetsen av $\mathbf{u}$, måste $\mathbf{w}$ vridas medurs för att peka i samma riktning som $\mathbf{v}$.

Är systemen $(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$, $(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w})$ respektive $(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u})$ positivt eller negativt orienterade?

Istället för att ett system $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ är positivt orienterat säger man ibland att det är *högerorienterat*. Detta förklaras av att man kan beskriva ett högerorienterat system med hjälp av tummen, pekfingret och långfingret på *höger hand*:

Om tummen står för vektorn $\mathbf{u}$, pekfingret för $\mathbf{v}$ och långfingret för $\mathbf{w}$, så måste $\mathbf{u}$ (tummen) vridas moturs för att peka i samma riktning som $\mathbf{v}$ (pekfingret), om man betraktar det hela från spetsen av $\mathbf{w}$ (långfingret).

På samma vis är ett *vänsterorienterat* system en synonym till ett negativt orienterat system; man använder sig då istället av fingrarna på *vänster hand*.

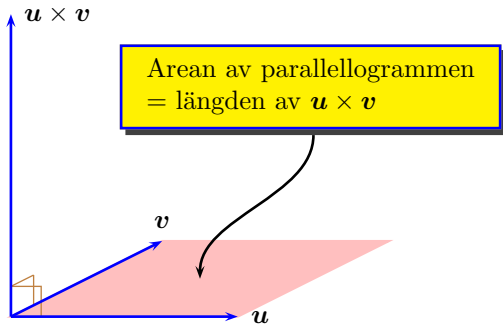
Vektorprodukt

Definition (Vektorprodukt)

Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara två icke-parallella vektorer i rummet. Med *vektorprodukten* av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ menar vi den entydigt bestämda vektor $\mathbf{w}$ som är sådan att

- $\mathbf{w}$ är ortogonal mot såväl $\mathbf{u}$ som $\mathbf{v}$
- $|\mathbf{w}|$ är lika med arean av den parallellogram som spänns upp av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$
- systemet $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ är positivt orienterat.

Om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är parallella, så definieras vektorprodukten av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ som nollvektorn $\mathbf{0}$. Vektorprodukten av vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ betecknas $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.



Figuren ovan illustrerar vektorprodukten. Vi har alltså att

- $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ ortogonal mot såväl $\mathbf{u}$ som $\mathbf{v}$
- $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ är lika med arean av den parallelogram som spänns upp av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$
- systemet $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v})$ är positivt orienterat.

I följande sats presenteras några räknelagar för vektorprodukten.

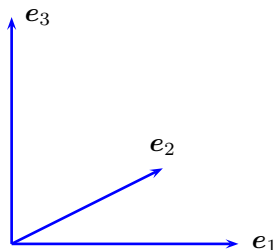
Sats

Låt $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ vara vektorer i rummet, samt λ ett reellt tal. Då är

- (i) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$
- (ii) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$
- (iii) $(\lambda \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (\lambda \mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$.

Exempel

Låt $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ vara en ON-bas för rummets vektorer (d.v.s. $|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = |\mathbf{e}_3| = 1$ och $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = 0$). Antag att $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ dessutom är positivt orienterad. Då har vi situationen i vidstående figur. Vi ska bestämma $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$.



Den parallelogram som spänns upp av $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ är en kvadrat med arean 1. Alltså ska $|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2| = 1$. Dessutom ska $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$ vara ortogonal mot både $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$, så denna vektorprodukt är antingen lika med $\mathbf{e}_3$ eller $-\mathbf{e}_3$. I och med att $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2)$ ska vara positivt orienterat, måste $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$.

Med ett liknande resonemang följer att

$$\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1$$

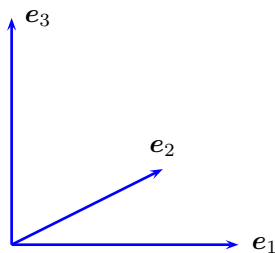
$$\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2.$$

Använder vi räknelagen $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$,
får vi dessutom

$$\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2.$$



Från definitionen av vektorprodukt fås till sist att
 $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{0}.$

Antag att $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3)$ och $\mathbf{v} = (y_1, y_2, y_3)$ har sina koordinater givna i en positivt orienterad ON-bas. Då blir, till att börja med,

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3) \times (y_1 \mathbf{e}_1 + y_2 \mathbf{e}_2 + y_3 \mathbf{e}_3). \quad (1)$$

Med hjälp av räknelagarna för vektorprodukt och sambanden

$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{0}$	$\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{0}$	$\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$

kan vi räkna vidare på (1), i avsikten att härleda en formel för hur koordinaterna till $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ ser ut i samma bas. Vi får

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= x_1 y_1 (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1) + x_1 y_2 (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) + x_1 y_3 (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3) \\ &\quad + x_2 y_1 (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1) + x_2 y_2 (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2) + x_2 y_3 (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) \\ &\quad + x_3 y_1 (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1) + x_3 y_2 (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2) + x_3 y_3 (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3) \\ &= x_1 y_2 \mathbf{e}_3 + x_1 y_3 (-\mathbf{e}_2) + x_2 y_1 (-\mathbf{e}_3) \\ &\quad + x_2 y_3 \mathbf{e}_1 + x_3 y_1 \mathbf{e}_2 + x_3 y_2 (-\mathbf{e}_1) \\ &= (x_2 y_3 - x_3 y_2) \mathbf{e}_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) \mathbf{e}_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Vi har därmed bevisat följande sats:

Sats

Om $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3)$ och $\mathbf{v} = (y_1, y_2, y_3)$ i en positivt orienterad ON-bas, så gäller att

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$$

i samma bas.

Anmärkning

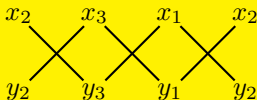
Man kan också skriva koordinaterna för $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ med hjälp av determinanter:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right).$$

Såvida ingenting annat uttryckligen sägs, kommer vi i fortsättningen att utgå ifrån att koordinaterna för en vektor i rummet alltid är givna i en positivt orienterad ON-bas.

Minnesregel för beräkning av vektorprodukt

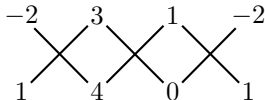
Följande uppställning kan underlätta beräkandet av vektorprodukten $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, där $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3)$ och $\mathbf{v} = (y_1, y_2, y_3)$:



Multiplicera korsvis och använd plustecken för de diagonalerna som lutar nedåt åt höger och minustecken för de övriga.

Exempel

Vi beräknar $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ om $\mathbf{u} = (1, -2, 3)$ och $\mathbf{v} = (0, 1, 4)$, med hjälp av ovanstående minnesregel:



Vi får

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = ((-2) \cdot 4 - 3 \cdot 1, 3 \cdot 0 - 1 \cdot 4, 1 \cdot 1 - (-2) \cdot 0) = (-11, -4, 1).$$

Exempel

De två vektorerna $\mathbf{u} = (1, -2, 3)$ och $\mathbf{v} = (0, 1, 4)$ från föregående exempel spänner upp en parallelogram i rummet. Beräkna arean av denna parallelogram.

Lösning.

Enligt definitionen av vektorprodukt spänner $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ upp en parallelogram, vars area är lika med $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$. Eftersom $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (-11, -4, 1)$, så ges därmed den sökta arean av

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = \sqrt{(-11)^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{138}.$$

