

Vektorgeometri för gymnasister

Per-Anders Svensson

<http://homepage.lnu.se/staff/psvmsi/vektorgeometri/gymnasiet.html>

Fakulteten för teknik
Linnéuniversitetet

Skalärprodukt

Innehåll

Skalärprodukt - Inledning

Definition av skalärprodukt

Räkneregler för skalärprodukt

Ortonormerade baser

Vinkelberäkningar

Basbyten mellan ON-baser

Skalärprodukt - Inledning

Vi påminner om att om $\mathbf{u}$ är en vektor, så avser vi med beteckningen $|\mathbf{u}|$ längden av denna vektor.

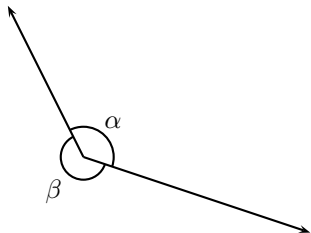
Än så länge har vi ingen metod för att beräkna längden av en godtycklig vektor; den enda vektor som vi hittills kan ange längden av är nollvektorn; vi har $|\mathbf{0}| = 0$.

Med hjälp av begreppet *skalärprodukt* kan vi härleda en formel för att beräkna längden av vilken vektor som helst, men för att formeln ska ge rätt svar, krävs det att koordinaterna är angivna i en speciell typ av bas, en s.k. *ortonormerad bas* eller kortare *ON-bas*.

I en ON-bas är basvektorerna valda med omsorg; de har alla samma längd (nämligen 1) och är dessutom parvis vinkelräta med varandra, eller *ortogonala*, som man också säger.

Definition av skalärprodukt

Som vi snart kommer att se, involverar definitionen av skalärprodukten av två vektorer vinkeln mellan dem. Som framgår av figuren till höger, finns det två vinklar att välja på, om man vill ange vinkeln mellan två vektorer. Vi måste bestämma oss för om det är vinkeln α eller β vi menar.



Det är mest naturligt (och praktiskt) att alltid avse den mindre av de två vinklarna, d.v.s. vinkeln α i figuren. Alltså gäller för vinkeln α mellan två vektorer, att $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$.

I boken förekommer det även att vinklar mäts i *radianer*. En radian är ett annat vinkelmått, som bestäms av att 1° motsvarar $\pi/180$ radianer. Mätt i radianer blir alltså $0 \leq \alpha \leq \pi$.

Definition (Skalärprodukt)

Låt $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ och $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ vara två vektorer. Med *skalärprodukten* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ menar vi talet

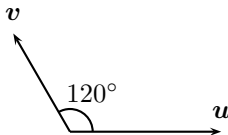
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \alpha,$$

där α är vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. Om någon av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är nollvektorn sätter vi $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Exempel

Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara två vektorer av längd 4 respektive 3, och antag att vinkeln mellan dem är 120° . Då blir

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos 120^\circ = 4 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -6.$$



I och med att skalärprodukten av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ ges av $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \alpha$, så är skalärprodukten av två vektorer alltid ett reellt tal (en skalär). Därför namnet *skalärprodukt*.

Om vidare både $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ och $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ så kan vi konstatera följande:

- Om vinkeln α mellan vektorerna är spetsig ($0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$ om man mäter i grader; $0 \leq \alpha < \pi/2$ om man mäter i radianer) så blir $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > 0$, ty då är $\cos \alpha > 0$.
- Om α är rät ($\alpha = 90^\circ$ eller $\alpha = \pi/2$ radianer) så är $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, ty då är $\cos \alpha = 0$.
- Om α är trubbig ($90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$ mätt i grader; $\pi/2 < \alpha \leq \pi$ mätt i radianer) så blir $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0$, ty då är $\cos \alpha < 0$.

Specialfallet $\alpha = 90^\circ$ är speciellt viktigt:

Definition (Ortogonal vektorer)

Två vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ säges vara *ortogonal*, om $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. En vanlig beteckning för detta (som dock inte används i läroboken) är $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.

Om varken $\mathbf{u}$ eller $\mathbf{v}$ är nollvektorn, så är alltså $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ ortogonal precis då de är vinkelräta (vinkeln α mellan dem är rät).

Vi ser vidare från definitionen av skalärprodukt att $\mathbf{u} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \cdot \mathbf{u} = 0$ för alla vektorer $\mathbf{u}$, så nollvektorn är ortogonal mot alla vektorer.

Räkneregler för skalärprodukt

Sats

Låt $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ vara vektorer och s ett reellt tal. Då gäller

- (i) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
- (ii) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
- (iii) $\mathbf{u} \cdot (s\mathbf{v}) = (s\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = s(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$
- (iv) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$, med likhet endast då $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Beträffande (iv) i ovanstående sats; i och med att vinkeln mellan en vektor $\mathbf{u}$ och sig själv är 0° , så blir

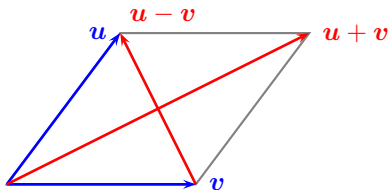
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}| |\mathbf{u}| \cos 0^\circ = |\mathbf{u}|^2,$$

eftersom $\cos 0^\circ = 1$. En formel för att beräkna längden $|\mathbf{u}|$ av en vektor $\mathbf{u}$ ges alltså av

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}.$$

Exempel

En romb är som bekant en fyrhörning, där alla fyra sidorna är lika långa. Figuren nedan visar en romb, som spänns upp av två vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. Eftersom sidorna är lika långa, så är $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}|$.



Romben har två diagonaler; de röda vektorerna i figuren ovan. Den långa diagonalen ges av vektorn $\mathbf{u} + \mathbf{v}$; den korta av $\mathbf{u} - \mathbf{v}$. Skalärprodukten mellan diagonalvektorerna blir

$$\begin{aligned}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \\ &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2.\end{aligned}$$

Men $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}|$, så $|\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2 = 0$. Alltså är $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ och $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ ortogonala, d.v.s. diagonalerna i en romb skär varandra i rät vinkel.

Ortonormerade baser

Vi ska nu se om vi kan härleda en formel för hur skalärprodukten mellan två vektorer ser ut, om vi har koordinater givna för dessa vektorer i någon bas. Till att börja med undersöker vi hur det kommer att se ut i planet.

Låt $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ vara en bas för planets vektorer, och antag att vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ har koordinaterna (x_1, x_2) respektive (y_1, y_2) i denna bas. Detta betyder att vi kan skriva $\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$ och $\mathbf{v} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2$. Med hjälp av räkneregler för skalärprodukt får vi nu att

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2) \cdot (y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2) \\ &= x_1y_1(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1) + x_1y_2(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) + x_2y_1(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1) + x_2y_2(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2) \\ &= x_1y_1|\mathbf{e}_1|^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) + x_2y_2|\mathbf{e}_2|^2.\end{aligned}$$

Denna formel ser inte speciellt vacker ut. Men om basvektorerna $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ båda har längden 1, d.v.s. om $|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = 1$, och om de dessutom är ortogonala, d.v.s. om $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0$, så blir formeln mycket enklare:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = x_1y_1 + x_2y_2.$$

Definition (Ortonormerad bas)

En bas $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ för rummets vektorer säges vara *ortonormerad* om vektorerna är parvis ortogonala, d.v.s. om

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = 0,$$

och om de alla har längden 1, d.v.s. om

$$|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = |\mathbf{e}_3| = 1.$$

Ofta säger man kortare *ON-bas* i stället för ”ortonormerad bas”.

Definitionen för en ON-bas i planet är analog med den ovanstående.

Vi såg att vi fick en ganska enkel formel för att beräkna skalärprodukten av två vektorer i planet, om deras koordinater är givna i en ON-bas: Om $\mathbf{u} = (x_1, x_2)$ och $\mathbf{v} = (y_1, y_2)$ så blir $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = x_1 y_1 + x_2 y_2$. Motsvarande formel för vektorer i rummet är en naturlig generalisering av denna, och presenteras i följande sats.

Sats

Låt $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3)$ och $\mathbf{v} = (y_1, y_2, y_3)$, där koordinaterna är givna i en ON-bas. Då gäller

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

Tidigare såg vi att längden av en vektor ges av formeln $|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$. Om $\mathbf{u}$ har sina koordinater givna i en ON-bas, får vi följande formel.

Följdsats

Antag att $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3)$ har sina koordinaterna givna i en ON-bas. Då är

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Exempel

Antag att $\mathbf{u} = (4, -1, 3)$, $\mathbf{v} = (0, 4, 3)$ och $\mathbf{w} = (1, -2, -2)$ i en ON-bas. Då är

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 4 \cdot 0 + (-1) \cdot 4 + 3 \cdot 3 = 0 - 4 + 9 = 5,$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 4 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) + 3 \cdot (-2) = 4 + 2 - 6 = 0 \quad \text{och}$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) + 3 \cdot (-2) = 0 - 8 - 6 = -14.$$

Vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{w}$ är alltså ortogonala. Vidare är

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 1 + 9} = \sqrt{26},$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{0^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{0 + 16 + 9} = \sqrt{25} = 5 \quad \text{och}$$

$$|\mathbf{w}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3.$$

Exempel

Vektorerna $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (0, -1, 0)$ och $\mathbf{u}_3 = (1, 0, -1)$ är parvis ortogonala (ty $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_3 = 0$; verifiera detta!). Men de bildar inte en ON-bas, ty de är inte alla av längd 1 (endast $\mathbf{u}_2$ har längden 1).

För att få en ON-bas, måste vi *normera* vektorerna, vilket betyder att vi multiplicerar dem med ett lämpligt tal så att resultatet blir en vektor av längd 1. En vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ normeras genom att multiplicera den med $1/|\mathbf{v}|$. Eftersom $|\mathbf{u}_1| = |\mathbf{u}_3| = \sqrt{2}$, så kommer därmed $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, där

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\mathbf{e}_2 = (0, -1, 0)$$

$$\mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right),$$

att vara en ON-bas.

Vinkelberäkningar

Med hjälp av skalärprodukt blir det även möjligt att beräkna vinkeln α mellan två vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.

Från definitionen av skalärprodukt vet vi ju att $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \alpha$. Om varken $\mathbf{u}$ eller $\mathbf{v}$ är nollvektorn, så är $|\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \neq 0$, och därmed blir

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|},$$

med vars hjälp vi kan beräkna α .

Exempel

I en ON-bas så har vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ koordinaterna $(1, -1, 2)$ respektive $(1, 0, 1)$. Vi skall bestämma vinkeln α mellan dessa två vektorer. Eftersom $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3$, $|\mathbf{u}| = \sqrt{6}$ och $|\mathbf{v}| = \sqrt{2}$, så blir

$$\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

Vi får därmed att $\alpha = 30^\circ$ (eller $\alpha = \pi/6$, om man mäter i radianer).

Basbyten mellan ON-baser

Antag att $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3)$ i en bas $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ (inte nödvändigtvis en ON-bas). Om vi byter till en ny bas $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$, så fann vi under förra lektionen, att om $\mathbf{u} = (y_1, y_2, y_3)$ i denna nya bas, så kan sambandet mellan de gamla och nya koordinaterna skrivas

$$X = TY \iff Y = T^{-1}X,$$

där X och Y är kolonnmatriser som innehåller koordinaterna för $\mathbf{u}$ i den gamla respektive nya basen, och där T är den s.k. *transformationsmatrisen*, som bildas genom att välja dess kolonner till i tur och ordning koordinaterna för $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$.

För att bestämma koordinaterna för vektorn $\mathbf{u}$ i den nya basen, behöver vi alltså väsentligen lösa ett linjärt ekvationssystem, och det kan ju ta sin lilla tid. Men om både den gamla och den nya basen är ON-baser, så blir det extra enkelt...

Sats

Låt T vara den transformationsmatris man får, om man ska göra ett basbyte från en ON-bas till en annan. Då är

$$T^{-1} = T^T,$$

d.v.s. att bestämma inversen till T , är samma sak som att transponera matrisen (byta plats på rader och kolonner).

Definition (Ortogonal matris)

En matris T säges vara *ortogonal* om

$$TT^T = T^T T = E.$$

Ett alternativt sätt att formulera satsen ovan är:

För ett basbyte mellan två ON-baser gäller att transformationsmatrisen är en ortogonal matris.

Exempel

Antag att $\mathbf{u} = (2, -3)$ har sina koordinater givna i en ON-bas $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ för planet. Vektorerna

$$\mathbf{f}_1 = (5/13, 12/13) \quad \text{och} \quad \mathbf{f}_2 = (-12/13, 5/13)$$

uppfyller $\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2 = 0$ och $|\mathbf{f}_1| = |\mathbf{f}_2| = 1$, så $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ är därmed en ON-bas. Vilka är $\mathbf{u}$:s koordinater (y_1, y_2) i denna nya bas?

Om vi byter från basen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ till basen $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$, så kommer transformationsmatrisen att ges av

$$T = \begin{pmatrix} 5/13 & -12/13 \\ 12/13 & 5/13 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}.$$

Eftersom matrisen T är ortogonal (vi byter från en ON-bas till en annan), är

$$T^{-1} = T^T = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ -12 & 5 \end{pmatrix}.$$

Med $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ och $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, så blir därmed

$$Y = T^{-1}X = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ -12 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -26 \\ -39 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix},$$

d.v.s. i den nya ON-basen $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ så blir $\mathbf{u} = (-2, -3)$.

