

Vektorgeometri för gymnasister

Per-Anders Svensson

<http://homepage.lnu.se/staff/psvmsi/vektorgeometri/gymnasiet.html>

Fakulteten för teknik
Linnéuniversitetet

Vektorer i planet och i rummet III

Innehåll

Kort repetition: Bas och koordinater

Basbyten

En geometrisk beskrivning av ett basbyte i planet

Ett konkret exempel på ett basbyte i planet

Basbyte i planet; allmänna fallet

Basbyte i rummet

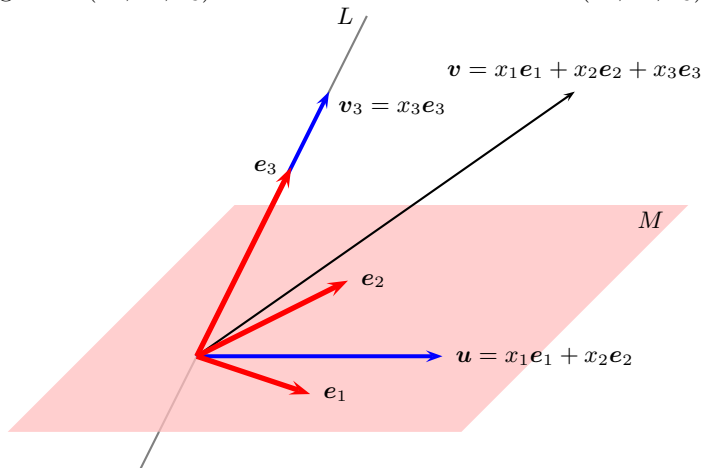
Krav på en bas

Kort repetition: Bas och koordinater

Om $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ är tre vektorer i rummet, som inte alla är parallella med ett och samma plan, så kan varje vektor $\mathbf{v}$ på entydigt vis skrivas som

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3.$$

Vi säger att (x_1, x_2, x_3) är koordinaterna för $\mathbf{v}$ i basen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.



Basbyten

När man ska arbeta med ett visst problem som har med vektorer att göra, så brukar dessa i regel antas ha sina koordinater givna i en förutbestämd bas, ofta en s.k. "standardbas".

Basbyten

När man ska arbeta med ett visst problem som har med vektorer att göra, så brukar dessa i regel antas ha sina koordinater givna i en förutbestämd bas, ofta en s.k. ”standardbas”.

Det är dock inte i alla lägen som denna bas är skräddarsydd för det problem som man har att lösa.

Basbyten

När man ska arbeta med ett visst problem som har med vektorer att göra, så brukar dessa i regel antas ha sina koordinater givna i en förutbestämd bas, ofta en s.k. "standardbas".

Det är dock inte i alla lägen som denna bas är skräddarsydd för det problem som man har att lösa.

Vad man då kan göra är att byta bas, mot en som passar bättre in för det aktuella problemet.

Basbyten

När man ska arbeta med ett visst problem som har med vektorer att göra, så brukar dessa i regel antas ha sina koordinater givna i en förutbestämd bas, ofta en s.k. "standardbas".

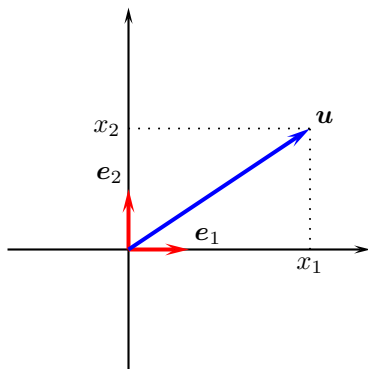
Det är dock inte i alla lägen som denna bas är skräddarsydd för det problem som man har att lösa.

Vad man då kan göra är att byta bas, mot en som passar bättre in för det aktuella problemet.

Men om en vektor har en viss uppsättning av koordinater i den bas man har från början, så kommer koordinaterna bli annorlunda i den nya basen. Frågan är då, om det finns något enkelt samband mellan koordinaterna för viss vektor i två olika baser?

En geometrisk beskrivning av ett basbyte i planet

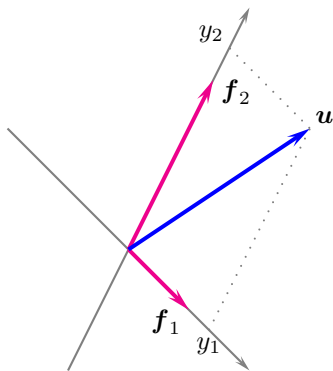
En vektor $\mathbf{u}$ har koordinaterna (x_1, x_2) i en bas $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ för planet, d.v.s. $\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$.



En geometrisk beskrivning av ett basbyte i planet

En vektor $\mathbf{u}$ har koordinaterna (x_1, x_2) i en bas $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ för planet, d.v.s. $\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$. Låt $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ vara en annan bas för planet, och antag att $\mathbf{u}$ i denna bas har koordinaterna (y_1, y_2) , d.v.s.

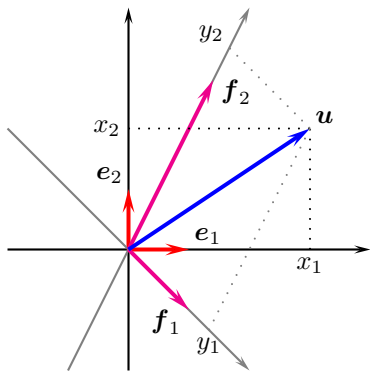
$$\mathbf{u} = y_1\mathbf{f}_1 + y_2\mathbf{f}_2.$$



En geometrisk beskrivning av ett basbyte i planet

En vektor $\mathbf{u}$ har koordinaterna (x_1, x_2) i en bas $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ för planet, d.v.s. $\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$. Låt $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ vara en annan bas för planet, och antag att $\mathbf{u}$ i denna bas har koordinaterna (y_1, y_2) , d.v.s.

$\mathbf{u} = y_1\mathbf{f}_1 + y_2\mathbf{f}_2$. Finns det ett enkelt sätt räkna ut (y_1, y_2) med hjälp av (x_1, x_2) ?



Ett konkret exempel på ett basbyte i planet

Låt $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ vara en bas för planet (vilket innebär att $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ inte är parallella). Antag $\mathbf{u} = (2, 3)$ i denna bas, vilket betyder att $\mathbf{u} = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$. (Rita gärna en bild!)

Ett konkret exempel på ett basbyte i planet

Låt $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ vara en bas för planet (vilket innebär att $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ inte är parallella). Antag $\mathbf{u} = (2, 3)$ i denna bas, vilket betyder att $\mathbf{u} = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$. (Rita gärna en bild!)

Låt $\mathbf{f}_1 = (1, 1)$ och $\mathbf{f}_2 = (-1, 2)$ vara två andra vektorer. Dessa två vektorer är inte parallella, eftersom det inte finns ett tal λ så att $\mathbf{f}_2 = \lambda\mathbf{f}_1$. Alltså kan vi även använda $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ som bas för planet. Ännu så länge vet vi inte vilka koordinater $\mathbf{u}$ har i basen $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$, så vi sätter tills vidare $\mathbf{u} = y_1\mathbf{f}_1 + y_2\mathbf{f}_2$, där (y_1, y_2) alltså är de koordinater vi hoppas kunna räkna ut.

Ett konkret exempel på ett basbyte i planet

Låt $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ vara en bas för planet (vilket innebär att $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ inte är parallella). Antag $\mathbf{u} = (2, 3)$ i denna bas, vilket betyder att $\mathbf{u} = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$. (Rita gärna en bild!)

Låt $\mathbf{f}_1 = (1, 1)$ och $\mathbf{f}_2 = (-1, 2)$ vara två andra vektorer. Dessa två vektorer är inte parallella, eftersom det inte finns ett tal λ så att $\mathbf{f}_2 = \lambda\mathbf{f}_1$. Alltså kan vi även använda $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ som bas för planet. Ännu så länge vet vi inte vilka koordinater $\mathbf{u}$ har i basen $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$, så vi sätter tills vidare $\mathbf{u} = y_1\mathbf{f}_1 + y_2\mathbf{f}_2$, där (y_1, y_2) alltså är de koordinater vi hoppas kunna räkna ut.

Att $\mathbf{f}_1 = (1, 1)$ i basen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ betyder att $\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$. På samma sätt är $\mathbf{f}_2 = (-1, 2)$ samma sak som $\mathbf{f}_2 = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$.

Ett konkret exempel på ett basbyte i planet

Låt $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ vara en bas för planet (vilket innebär att $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ inte är parallella). Antag $\mathbf{u} = (2, 3)$ i denna bas, vilket betyder att $\mathbf{u} = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$. (Rita gärna en bild!)

Låt $\mathbf{f}_1 = (1, 1)$ och $\mathbf{f}_2 = (-1, 2)$ vara två andra vektorer. Dessa två vektorer är inte parallella, eftersom det inte finns ett tal λ så att $\mathbf{f}_2 = \lambda\mathbf{f}_1$. Alltså kan vi även använda $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ som bas för planet. Ännu så länge vet vi inte vilka koordinater $\mathbf{u}$ har i basen $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$, så vi sätter tills vidare $\mathbf{u} = y_1\mathbf{f}_1 + y_2\mathbf{f}_2$, där (y_1, y_2) alltså är de koordinater vi hoppas kunna räkna ut.

Att $\mathbf{f}_1 = (1, 1)$ i basen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ betyder att $\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$. På samma sätt är $\mathbf{f}_2 = (-1, 2)$ samma sak som $\mathbf{f}_2 = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$. Detta ger nu

$$\mathbf{u} = y_1\mathbf{f}_1 + y_2\mathbf{f}_2 = y_1(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) + y_2(-\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2)$$

Ett konkret exempel på ett basbyte i planet

Låt $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ vara en bas för planet (vilket innebär att $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ inte är parallella). Antag $\mathbf{u} = (2, 3)$ i denna bas, vilket betyder att $\mathbf{u} = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$. (Rita gärna en bild!)

Låt $\mathbf{f}_1 = (1, 1)$ och $\mathbf{f}_2 = (-1, 2)$ vara två andra vektorer. Dessa två vektorer är inte parallella, eftersom det inte finns ett tal λ så att $\mathbf{f}_2 = \lambda\mathbf{f}_1$. Alltså kan vi även använda $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ som bas för planet. Ännu så länge vet vi inte vilka koordinater $\mathbf{u}$ har i basen $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$, så vi sätter tills vidare $\mathbf{u} = y_1\mathbf{f}_1 + y_2\mathbf{f}_2$, där (y_1, y_2) alltså är de koordinater vi hoppas kunna räkna ut.

Att $\mathbf{f}_1 = (1, 1)$ i basen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ betyder att $\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$. På samma sätt är $\mathbf{f}_2 = (-1, 2)$ samma sak som $\mathbf{f}_2 = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$. Detta ger nu

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= y_1\mathbf{f}_1 + y_2\mathbf{f}_2 = y_1(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) + y_2(-\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2) \\ &= (y_1 - y_2)\mathbf{e}_1 + (y_1 + 2y_2)\mathbf{e}_2.\end{aligned}$$

Ett konkret exempel på ett basbyte i planet

Låt $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ vara en bas för planet (vilket innebär att $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ inte är parallella). Antag $\mathbf{u} = (2, 3)$ i denna bas, vilket betyder att $\mathbf{u} = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$. (Rita gärna en bild!)

Låt $\mathbf{f}_1 = (1, 1)$ och $\mathbf{f}_2 = (-1, 2)$ vara två andra vektorer. Dessa två vektorer är inte parallella, eftersom det inte finns ett tal λ så att $\mathbf{f}_2 = \lambda\mathbf{f}_1$. Alltså kan vi även använda $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ som bas för planet. Ännu så länge vet vi inte vilka koordinater $\mathbf{u}$ har i basen $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$, så vi sätter tills vidare $\mathbf{u} = y_1\mathbf{f}_1 + y_2\mathbf{f}_2$, där (y_1, y_2) alltså är de koordinater vi hoppas kunna räkna ut.

Att $\mathbf{f}_1 = (1, 1)$ i basen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ betyder att $\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$. På samma sätt är $\mathbf{f}_2 = (-1, 2)$ samma sak som $\mathbf{f}_2 = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$. Detta ger nu

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= y_1\mathbf{f}_1 + y_2\mathbf{f}_2 = y_1(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) + y_2(-\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2) \\ &= (y_1 - y_2)\mathbf{e}_1 + (y_1 + 2y_2)\mathbf{e}_2.\end{aligned}$$

Men koordinaterna för en vektor i en given bas är ju entydigt bestämda, och vi vet att $\mathbf{u} = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$. Alltså måste

$$\begin{cases} y_1 - y_2 = 2 \\ y_1 + 2y_2 = 3. \end{cases}$$

Vi fick ett linjärt ekvationssystem att lösa. Just detta system

$$\begin{cases} y_1 - y_2 = 2 \\ y_1 + 2y_2 = 3 \end{cases}$$

visar sig ha lösningen

$$\begin{cases} y_1 = 7/3 \\ y_2 = 1/3, \end{cases}$$

och alltså är

$$\mathbf{u} = y_1 \mathbf{f}_1 + y_2 \mathbf{f}_2 = \frac{7}{3} \mathbf{f}_1 + \frac{1}{3} \mathbf{f}_2,$$

d.v.s. vi har att $\mathbf{u} = (7/3, 1/3)$ i basen $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$.

Vi fick ett linjärt ekvationssystem att lösa. Just detta system

$$\begin{cases} y_1 - y_2 = 2 \\ y_1 + 2y_2 = 3 \end{cases}$$

visar sig ha lösningen

$$\begin{cases} y_1 = 7/3 \\ y_2 = 1/3, \end{cases}$$

och alltså är

$$\mathbf{u} = y_1 \mathbf{f}_1 + y_2 \mathbf{f}_2 = \frac{7}{3} \mathbf{f}_1 + \frac{1}{3} \mathbf{f}_2,$$

d.v.s. vi har att $\mathbf{u} = (7/3, 1/3)$ i basen $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$.

Anmärkning

På matrisform får ekvationssystemet ovan utseendet

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Studera kolonnerna i koefficientmatrisen! De är ju desamma som koordinaterna för de basvektorerna $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$ i basen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$; vi hade ju $\mathbf{f}_1 = (1, 1)$ och $\mathbf{f}_2 = (-1, 2)$. Är detta måne bara en slump...?

Basbyte i planet; allmänna fallet

Låt $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ vara en bas för planet, och att $\mathbf{u} = (x_1, x_2)$ i denna bas. Vi önskar nu göra ett basbyte till en ny bas $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$. Antag $\mathbf{u} = (y_1, y_2)$ i denna nya bas. Vi vill hitta ett allmänt samband mellan de "gamla" koordinaterna (x_1, x_2) och de "nya" (y_1, y_2) . För att göra detta, härmar vi föregående exempel. Skillnaden blir endast att vi byter ut alla siffror i exemplet mot bokstäver.

Basbyte i planet; allmänna fallet

Låt $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ vara en bas för planet, och att $\mathbf{u} = (x_1, x_2)$ i denna bas. Vi önskar nu göra ett basbyte till en ny bas $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$. Antag $\mathbf{u} = (y_1, y_2)$ i denna nya bas. Vi vill hitta ett allmänt samband mellan de "gamla" koordinaterna (x_1, x_2) och de "nya" (y_1, y_2) . För att göra detta, härmar vi föregående exempel. Skillnaden blir endast att vi byter ut alla siffror i exemplet mot bokstäver.

Först konstaterar vi att $\mathbf{u} = (x_1, x_2)$ i basen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ betyder att

$$\mathbf{u} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2,$$

och att $\mathbf{u} = (y_1, y_2)$ i basen $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ innebär att

$$\mathbf{u} = y_1 \mathbf{f}_1 + y_2 \mathbf{f}_2.$$

Basbyte i planet; allmänna fallet

Låt $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ vara en bas för planet, och att $\mathbf{u} = (x_1, x_2)$ i denna bas. Vi önskar nu göra ett basbyte till en ny bas $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$. Antag $\mathbf{u} = (y_1, y_2)$ i denna nya bas. Vi vill hitta ett allmänt samband mellan de "gamla" koordinaterna (x_1, x_2) och de "nya" (y_1, y_2) . För att göra detta, härmar vi föregående exempel. Skillnaden blir endast att vi byter ut alla siffror i exemplet mot bokstäver.

Först konstaterar vi att $\mathbf{u} = (x_1, x_2)$ i basen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ betyder att

$$\mathbf{u} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2,$$

och att $\mathbf{u} = (y_1, y_2)$ i basen $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ innebär att

$$\mathbf{u} = y_1 \mathbf{f}_1 + y_2 \mathbf{f}_2.$$

Vektorerna $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$ har ju entydigt bestämda koordinater i basen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. I förra exemplet var $\mathbf{f}_1 = (1, 1)$ och $\mathbf{f}_2 = (-1, 2)$. Här sätter vi $\mathbf{f}_1 = (a_{11}, a_{12})$ och $\mathbf{f}_2 = (a_{21}, a_{22})$, vilket betyder att

$$\mathbf{f}_1 = a_{11} \mathbf{e}_1 + a_{12} \mathbf{e}_2 \quad \text{och} \quad \mathbf{f}_2 = a_{21} \mathbf{e}_1 + a_{22} \mathbf{e}_2.$$

Vi får nu att

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= y_1 \mathbf{f}_1 + y_2 \mathbf{f}_2 = y_1(a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{12}\mathbf{e}_2) + y_2(a_{21}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2) \\ &= (a_{11}y_1 + a_{21}y_2)\mathbf{e}_1 + (a_{12}y_1 + a_{22}y_2)\mathbf{e}_2.\end{aligned}$$

Vi får nu att

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= y_1 \mathbf{f}_1 + y_2 \mathbf{f}_2 = y_1(a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{12}\mathbf{e}_2) + y_2(a_{21}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2) \\ &= (a_{11}y_1 + a_{21}y_2)\mathbf{e}_1 + (a_{12}y_1 + a_{22}y_2)\mathbf{e}_2.\end{aligned}$$

Eftersom vi också har $\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$, måste därmed

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{21}y_2 \\ x_2 = a_{12}y_1 + a_{22}y_2 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Vi får nu att

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= y_1 \mathbf{f}_1 + y_2 \mathbf{f}_2 = y_1(a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{12}\mathbf{e}_2) + y_2(a_{21}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2) \\ &= (a_{11}y_1 + a_{21}y_2)\mathbf{e}_1 + (a_{12}y_1 + a_{22}y_2)\mathbf{e}_2.\end{aligned}$$

Eftersom vi också har $\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$, måste därmed

$$\begin{aligned}\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{21}y_2 \\ x_2 = a_{12}y_1 + a_{22}y_2 \end{cases} &\iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &\iff X = TY,\end{aligned}$$

där

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Vi får nu att

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= y_1 \mathbf{f}_1 + y_2 \mathbf{f}_2 = y_1(a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{12}\mathbf{e}_2) + y_2(a_{21}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2) \\ &= (a_{11}y_1 + a_{21}y_2)\mathbf{e}_1 + (a_{12}y_1 + a_{22}y_2)\mathbf{e}_2.\end{aligned}$$

Eftersom vi också har $\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$, måste därmed

$$\begin{aligned}\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{21}y_2 \\ x_2 = a_{12}y_1 + a_{22}y_2 \end{cases} &\iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &\iff X = TY,\end{aligned}$$

där

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Notera att kolonnerna hos matrisen T verkligen blir desamma som koordinaterna för vektorerna $\mathbf{f}_1 = (a_{11}, a_{12})$ och $\mathbf{f}_2 = (a_{21}, a_{22})$ i basen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.

Vi får nu att

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= y_1 \mathbf{f}_1 + y_2 \mathbf{f}_2 = y_1(a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{12}\mathbf{e}_2) + y_2(a_{21}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2) \\ &= (a_{11}y_1 + a_{21}y_2)\mathbf{e}_1 + (a_{12}y_1 + a_{22}y_2)\mathbf{e}_2.\end{aligned}$$

Eftersom vi också har $\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$, måste därmed

$$\begin{aligned}\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{21}y_2 \\ x_2 = a_{12}y_1 + a_{22}y_2 \end{cases} &\iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &\iff X = TY,\end{aligned}$$

där

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Notera att kolonnerna hos matrisen T verkligen blir desamma som koordinaterna för vektorerna $\mathbf{f}_1 = (a_{11}, a_{12})$ och $\mathbf{f}_2 = (a_{21}, a_{22})$ i basen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.

Matrisekvationen $X = TY$ uttrycker de "gamla" koordinaterna (som ges av X) med hjälp av de "nya" (som ges av Y). Det är inte riktigt det vi vill ha; vi vill helst att det ska vara på "andra hållet".

Vi får nu att

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= y_1 \mathbf{f}_1 + y_2 \mathbf{f}_2 = y_1(a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{12}\mathbf{e}_2) + y_2(a_{21}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2) \\ &= (a_{11}y_1 + a_{21}y_2)\mathbf{e}_1 + (a_{12}y_1 + a_{22}y_2)\mathbf{e}_2.\end{aligned}$$

Eftersom vi också har $\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$, måste därmed

$$\begin{aligned}\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{21}y_2 \\ x_2 = a_{12}y_1 + a_{22}y_2 \end{cases} &\iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &\iff X = TY,\end{aligned}$$

där

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Notera att kolonnerna hos matrisen T verkligen blir desamma som koordinaterna för vektorerna $\mathbf{f}_1 = (a_{11}, a_{12})$ och $\mathbf{f}_2 = (a_{21}, a_{22})$ i basen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.

Matrisekvationen $X = TY$ uttrycker de "gamla" koordinaterna (som ges av X) med hjälp av de "nya" (som ges av Y). Det är inte riktigt det vi vill ha; vi vill helst att det ska vara på "andra hållet". Men $X = TY$ kan även skrivas $Y = T^{-1}X$ (om matrisen T är inverterbar), och då får det vi önskar: de nya koordinaterna uttryckta med hjälp av de gamla.

Vi sammanfattar:

- Låt vara $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ en bas för planet.

Vi sammanfattar:

- Låt vara $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ en bas för planet.
- Låt $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ vara en ny bas för planet. Bilda en matris T genom att som dess *kolonner* välja koordinaterna för $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$, uttryckta i basen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.

Vi sammanfattar:

- Låt vara $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ en bas för planet.
- Låt $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ vara en ny bas för planet. Bilda en matris T genom att som dess *kolonner* välja koordinaterna för $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$, uttryckta i basen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.
- Låt $\mathbf{u}$ vara en godtycklig vektor i planet. Låt X vara den kolonnmatris, vars element utgörs av koordinaterna för $\mathbf{u}$ i den *gamla* basen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.

Vi sammanfattar:

- Låt vara $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ en bas för planet.
- Låt $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ vara en ny bas för planet. Bilda en matris T genom att som dess *kolonner* välja koordinaterna för $\mathbf{e}_1$ i tur och ordning $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$, uttryckta i basen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.
- Låt $\mathbf{u}$ vara en godtycklig vektor i planet. Låt X vara den kolonnmatris, vars element utgörs av koordinaterna för $\mathbf{u}$ i den *gamla* basen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.
- Om Y är den kolonnmatris, vars element utgörs av koordinaterna för $\mathbf{u}$ i den *nya* basen $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$, så gäller

$$X = TY.$$

Om matrisen T är inverterbar, så får vi de nya koordinaterna uttryckta med hjälp av de gamla, med hjälp av formeln

$$Y = T^{-1}X.$$

Basbyte i rummet

Ovanstående fungerar precis lika bra för basbyten i rummet.

- Låt vara $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ en bas för rummet.

Basbyte i rummet

Ovanstående fungerar precis lika bra för basbyten i rummet.

- Låt vara $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ en bas för rummet.
- Låt $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ vara en ny bas för rummet. Bilda en matris T genom att som dess *kolonner* välja koordinaterna för i tur och ordning $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ och $\mathbf{f}_3$, uttryckta i basen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.

Basbyte i rummet

Ovanstående fungerar precis lika bra för basbyten i rummet.

- Låt vara $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ en bas för rummet.
- Låt $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ vara en ny bas för rummet. Bilda en matris T genom att som dess *kolonner* välja koordinaterna för i tur och ordning $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ och $\mathbf{f}_3$, uttryckta i basen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.
- Låt $\mathbf{u}$ vara en vektor i rummet. Låt X vara den kolonnmatris, vars element är $\mathbf{u}$:s koordinater i den *gamla* basen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.

Basbyte i rummet

Ovanstående fungerar precis lika bra för basbyten i rummet.

- Låt vara $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ en bas för rummet.
- Låt $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ vara en ny bas för rummet. Bilda en matris T genom att som dess *kolonner* välja koordinaterna för i tur och ordning $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ och $\mathbf{f}_3$, uttryckta i basen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.
- Låt $\mathbf{u}$ vara en vektor i rummet. Låt X vara den kolonnmatris, vars element är $\mathbf{u}$:s koordinater i den *gamla* basen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.
- Om Y är den kolonnmatris, vars element utgörs av koordinaterna för $\mathbf{u}$ i den *nya* basen $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$, så gäller

$$X = TY.$$

Om matrisen T är inverterbar, så får vi med hjälp av formeln

$$Y = T^{-1}X$$

de nya koordinaterna Y uttryckta med hjälp av de gamla X .

Basbyte i rummet

Ovanstående fungerar precis lika bra för basbyten i rummet.

- Låt vara $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ en bas för rummet.
- Låt $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ vara en ny bas för rummet. Bilda en matris T genom att som dess *kolonner* välja koordinaterna för i tur och ordning $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ och $\mathbf{f}_3$, uttryckta i basen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.
- Låt $\mathbf{u}$ vara en vektor i rummet. Låt X vara den kolonnmatris, vars element är $\mathbf{u}$:s koordinater i den *gamla* basen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.
- Om Y är den kolonnmatris, vars element utgörs av koordinaterna för $\mathbf{u}$ i den *nya* basen $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$, så gäller

$$X = TY.$$

Om matrisen T är inverterbar, så får vi med hjälp av formeln

$$Y = T^{-1}X$$

de nya koordinaterna Y uttryckta med hjälp av de gamla X .

Matrisen T ovan är en s.k. *transformationsmatris* eller *basbytesmatris*. Man kan visa att en sådan alltid *är* inverterbar.

Krav på en bas

Vi tittar lite närmare på proceduren för ett basbyte. Från början har vi givet en bas av antingen två eller tre vektorer, beroende på om vi befinner oss i planet eller rummet. Därefter ska vi välja en ny bas...

Krav på en bas

Vi tittar lite närmare på proceduren för ett basbyte. Från början har vi givet en bas av antingen två eller tre vektorer, beroende på om vi befinner oss i planet eller rummet. Därefter ska vi välja en ny bas...

Men hur kan man egentligen veta att en uppsättning vektorer verkligen *är* en bas?

Krav på en bas

Vi tittar lite närmare på proceduren för ett basbyte. Från början har vi givet en bas av antingen två eller tre vektorer, beroende på om vi befinner oss i planet eller rummet. Därefter ska vi välja en ny bas...

Men hur kan man egentligen veta att en uppsättning vektorer verkligen *är* en bas?

- Basvektorerna måste *spänna upp* rummet/planet, d.v.s. varje vektor i rummet/planet ska kunna skrivas som en linjärkombination av basvektorerna.

Krav på en bas

Vi tittar lite närmare på proceduren för ett basbyte. Från början har vi givet en bas av antingen två eller tre vektorer, beroende på om vi befinner oss i planet eller rummet. Därefter ska vi välja en ny bas...

Men hur kan man egentligen veta att en uppsättning vektorer verkligen *är* en bas?

- Basvektorerna måste *spänna upp* rummet/planet, d.v.s. varje vektor i rummet/planet ska kunna skrivas som en linjärkombination av basvektorerna.
- Basvektorerna måste vara *linjärt oberoende* (ingen av dem ska kunna skrivas som en linjärkombination av de övriga).

Krav på en bas

Vi tittar lite närmare på proceduren för ett basbyte. Från början har vi givet en bas av antingen två eller tre vektorer, beroende på om vi befinner oss i planet eller rummet. Därefter ska vi välja en ny bas...

Men hur kan man egentligen veta att en uppsättning vektorer verkligen *är* en bas?

- Basvektorerna måste *spänna upp* rummet/planet, d.v.s. varje vektor i rummet/planet ska kunna skrivas som en linjärkombination av basvektorerna.
- Basvektorerna måste vara *linjärt oberoende* (ingen av dem ska kunna skrivas som en linjärkombination av de övriga).
- För en bas i planet betyder detta att vektorerna i basen måste vara två till antalet, och att dessa *inte* får vara parallella.

Krav på en bas

Vi tittar lite närmare på proceduren för ett basbyte. Från början har vi givet en bas av antingen två eller tre vektorer, beroende på om vi befinner oss i planet eller rummet. Därefter ska vi välja en ny bas...

Men hur kan man egentligen veta att en uppsättning vektorer verkligen *är* en bas?

- Basvektorerna måste *spänna upp* rummet/planet, d.v.s. varje vektor i rummet/planet ska kunna skrivas som en linjärkombination av basvektorerna.
- Basvektorerna måste vara *linjärt oberoende* (ingen av dem ska kunna skrivas som en linjärkombination av de övriga).
- För en bas i planet betyder detta att vektorerna i basen måste vara två till antalet, och att dessa *inte* får vara parallella.
- För en bas i rummet måste det finnas tre basvektorer, och dessa får *inte* vara parallella med samma plan.

Exempel

I ett exempel från förra föreläsningen fann vi att vektorerna $\mathbf{u}_1 = (4, -1, -1)$, $\mathbf{u}_2 = (3, 2, 0)$ och $\mathbf{u}_3 = (-3, -2, 1)$ är linjärt oberoende, d.v.s. om $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ är tal sådana att

$$\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \lambda_3 \mathbf{u}_3 = \mathbf{0},$$

så måste $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Vi konstaterade detta genom att lösa ett homogent ekvationssystem $A\mathbf{X} = \mathbf{0}$, där kolonnerna hos matrisen A består av koordinaterna hos vektorerna $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$.

Exempel

I ett exempel från förra föreläsningen fann vi att vektorerna $\mathbf{u}_1 = (4, -1, -1)$, $\mathbf{u}_2 = (3, 2, 0)$ och $\mathbf{u}_3 = (-3, -2, 1)$ är linjärt oberoende, d.v.s. om $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ är tal sådana att

$$\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \lambda_3 \mathbf{u}_3 = \mathbf{0},$$

så måste $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Vi konstaterade detta genom att lösa ett homogent ekvationssystem $AX = \mathbf{0}$, där kolonnerna hos matrisen A består av koordinaterna hos vektorerna $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$.

Att $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ är linjärt oberoende betyder att vi skulle kunna använda dessa vektorer som en bas för rummet, om vi vill. Om en vektor $\mathbf{v}$ har koordinaterna $(4, -1, 1)$ i den *gamla* basen (d.v.s. den vi har given från början), vilka blir dess koordinater i basen $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$?

Låt kolonnmatriserna X och Y svara mot koordinaterna hos v i den gamla respektive nya basen. Då gäller sambandet

$$X = TY,$$

där T är transformationsmatrisen.

Låt kolonnmatriserna X och Y svara mot koordinaterna hos $\boldsymbol{v}$ i den gamla respektive nya basen. Då gäller sambandet

$$X = TY,$$

där T är transformationsmatrisen.

Eftersom $\boldsymbol{u}_1 = (4, -1, -1)$, $\boldsymbol{u}_2 = (3, 2, 0)$ och $\boldsymbol{u}_3 = (-3, -2, 1)$, så blir i det här fallet

$$T = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Låt kolonnmatriserna X och Y svara mot koordinaterna hos $\boldsymbol{v}$ i den gamla respektive nya basen. Då gäller sambandet

$$X = TY,$$

där T är transformationsmatrisen.

Eftersom $\boldsymbol{u}_1 = (4, -1, -1)$, $\boldsymbol{u}_2 = (3, 2, 0)$ och $\boldsymbol{u}_3 = (-3, -2, 1)$, så blir i det här fallet

$$T = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vidare hade vi $\boldsymbol{v} = (4, -1, 1)$ i den gamla basen, så

$$X = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Låt kolonnmatriserna X och Y svara mot koordinaterna hos $\mathbf{v}$ i den gamla respektive nya basen. Då gäller sambandet

$$X = TY,$$

där T är transformationsmatrisen.

Eftersom $\mathbf{u}_1 = (4, -1, -1)$, $\mathbf{u}_2 = (3, 2, 0)$ och $\mathbf{u}_3 = (-3, -2, 1)$, så blir i det här fallet

$$T = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vidare hade vi $\mathbf{v} = (4, -1, 1)$ i den gamla basen, så

$$X = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

I den nya basen vet vi ännu inte vilka koordinater $\mathbf{v}$ får, så vi sätter

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Vi ska lösa matrisekvationen $X = TY$, vilket är samma sak som

$$\begin{cases} 4y_1 + 3y_2 - 3y_3 = 4 \\ -y_1 + 2y_2 - 2y_3 = -1 \\ -y_1 \quad \quad + y_3 = 1. \end{cases}$$

Vi ska lösa matrisekvationen $X = TY$, vilket är samma sak som

$$\begin{cases} 4y_1 + 3y_2 - 3y_3 = 4 \\ -y_1 + 2y_2 - 2y_3 = -1 \\ -y_1 \quad \quad + y_3 = 1. \end{cases}$$

Med hjälp av Gausselimination får vi att

$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 2 \\ y_3 = 2. \end{cases}$$

Vi ska lösa matrisekvationen $X = TY$, vilket är samma sak som

$$\begin{cases} 4y_1 + 3y_2 - 3y_3 = 4 \\ -y_1 + 2y_2 - 2y_3 = -1 \\ -y_1 \quad \quad + y_3 = 1. \end{cases}$$

Med hjälp av Gausselimination får vi att

$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 2 \\ y_3 = 2. \end{cases}$$

Alltså är $\mathbf{v} = (1, 2, 2)$ i basen $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$, d.v.s.

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3.$$

Vi ska lösa matrisekvationen $X = TY$, vilket är samma sak som

$$\begin{cases} 4y_1 + 3y_2 - 3y_3 = 4 \\ -y_1 + 2y_2 - 2y_3 = -1 \\ -y_1 \quad \quad + y_3 = 1. \end{cases}$$

Med hjälp av Gausselimination får vi att

$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 2 \\ y_3 = 2. \end{cases}$$

Alltså är $\mathbf{v} = (1, 2, 2)$ i basen $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$, d.v.s.

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3.$$

Anmärkning

Lägg märke att transformationsmatrisen T bildas på samma sätt som vi bildade matrisen A i exemplet från den förra föreläsningen. Då löste vi ett homogent ekvationssystem $AX = \mathbf{0}$. Här löser vi ett inhomogent ekvationssystem $TY = X$ med samma koefficientmatris ($A = T$).