

Vektorgeometri för gymnasister

Per-Anders Svensson

<http://w3.msi.vxu.se/users/pa/vektorgeometri/gymnasiet.html>

Institutionen för datavetenskap, fysik och matematik
Linnéuniversitetet

Vektorer i planet och rummet II

Innehåll

Kort repetition: Vektorer

Bas och koordinater

Vektorer som ligger på en linje

Vektorer som ligger i ett plan

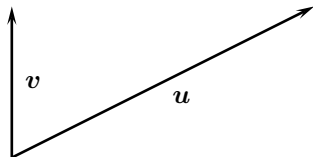
Vektorer i rummet

Koordinatsystem

Linjärkombinationer

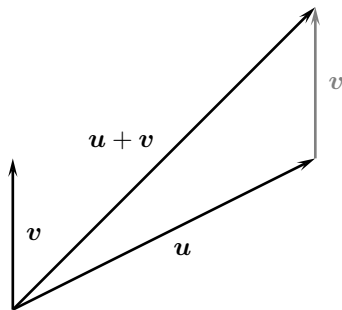
Kort repetition: Vektorer

En *vektor* är en mängd som består av alla riktade sträckor som har en given längd och en given riktning gemensamt. Vektorer ritas med hjälp av pilar. Vi kan addera vektorer...



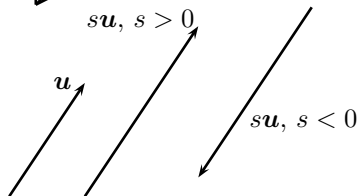
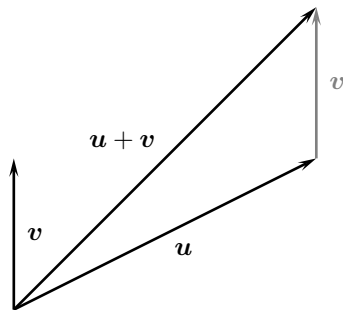
Kort repetition: Vektorer

En *vektor* är en mängd som består av alla riktade sträckor som har en given längd och en given riktning gemensamt. Vektorer ritas med hjälp av pilar. Vi kan addera vektorer...



Kort repetition: Vektorer

En *vektor* är en mängd som består av alla riktade sträckor som har en given längd och en given riktning gemensamt. Vektorer ritas med hjälp av pilar. Vi kan addera vektorer...



...och multiplicera vektorer med tal:

Bas och koordinater

Så här långt har vi enbart en geometrisk åskådning av vektorer; när vi räknar med vektorer (adderar dem, eller multiplicerar dem med ett tal) görs detta genom att rita pilar. Det vore bekvämt om man också kunde räkna med vektorer, utan att alltjämt rita.

Bas och koordinater

Så här långt har vi enbart en geometrisk åskådning av vektorer; när vi räknar med vektorer (adderar dem, eller multiplicerar dem med ett tal) görs detta genom att rita pilar. Det vore bekvämt om man också kunde räkna med vektorer, utan att alltjämt rita.

För att kunna räkna med vektorer utan att rita, behöver vi ett sätt att representera en vektor med ett eller flera tal. Hur många tal som behövs beror på omständigheterna:

Bas och koordinater

Så här långt har vi enbart en geometrisk åskådning av vektorer; när vi räknar med vektorer (adderar dem, eller multiplicerar dem med ett tal) görs detta genom att rita pilar. Det vore bekvämt om man också kunde räkna med vektorer, utan att alltjämt rita.

För att kunna räkna med vektorer utan att rita, behöver vi ett sätt att representera en vektor med ett eller flera tal. Hur många tal som behövs beror på omständigheterna:

- Det räcker med ett tal (eller en *koordinat*) om vi vill representera alla vektorer som ligger på en given linje (eftersom en linje är endimensionell)

Bas och koordinater

Så här långt har vi enbart en geometrisk åskådning av vektorer; när vi räknar med vektorer (adderar dem, eller multiplicerar dem med ett tal) görs detta genom att rita pilar. Det vore bekvämt om man också kunde räkna med vektorer, utan att alltså rita.

För att kunna räkna med vektorer utan att rita, behöver vi ett sätt att representera en vektor med ett eller flera tal. Hur många tal som behövs beror på omständigheterna:

- Det räcker med ett tal (eller en *koordinat*) om vi vill representera alla vektorer som ligger på en given linje (eftersom en linje är endimensionell)
- Det behövs två koordinater för att representera alla vektorer som ligger i ett givet plan (eftersom ett plan är tvådimensionellt)

Bas och koordinater

Så här långt har vi enbart en geometrisk åskådning av vektorer; när vi räknar med vektorer (adderar dem, eller multiplicerar dem med ett tal) görs detta genom att rita pilar. Det vore bekvämt om man också kunde räkna med vektorer, utan att alltså rita.

För att kunna räkna med vektorer utan att rita, behöver vi ett sätt att representera en vektor med ett eller flera tal. Hur många tal som behövs beror på omständigheterna:

- Det räcker med ett tal (eller en *koordinat*) om vi vill representera alla vektorer som ligger på en given linje (eftersom en linje är endimensionell)
- Det behövs två koordinater för att representera alla vektorer som ligger i ett givet plan (eftersom ett plan är tvådimensionellt)
- Tre koordinater behövs för att representera alla vektorer i rummet (som ju är tredimensionellt)

Bas och koordinater

Så här långt har vi enbart en geometrisk åskådning av vektorer; när vi räknar med vektorer (adderar dem, eller multiplicerar dem med ett tal) görs detta genom att rita pilar. Det vore bekvämt om man också kunde räkna med vektorer, utan att alltså rita.

För att kunna räkna med vektorer utan att rita, behöver vi ett sätt att representera en vektor med ett eller flera tal. Hur många tal som behövs beror på omständigheterna:

- Det räcker med ett tal (eller en *koordinat*) om vi vill representera alla vektorer som ligger på en given linje (eftersom en linje är endimensionell)
- Det behövs två koordinater för att representera alla vektorer som ligger i ett givet plan (eftersom ett plan är tvådimensionellt)
- Tre koordinater behövs för att representera alla vektorer i rummet (som ju är tredimensionellt)
- Det finns matematiska tillämpningar där det förekommer vektorer som måste representeras av fyra koordinater eller fler. I det här fallet saknas en geometrisk tolkning, men det hindrar inte att man likväl kan räkna med vektorer i så kallade "*n*-dimensionella rum", där $n \geq 4$.

Vektorer som ligger på en linje

Låt L vara en linje i rummet. Vi säger att en vektor $\boldsymbol{v}$ *ligger på* L , om $\boldsymbol{v}$ kan parallellförflyttas till L .

Vektorer som ligger på en linje

Låt L vara en linje i rummet. Vi säger att en vektor $\mathbf{v}$ *ligger på* L , om $\mathbf{v}$ kan parallellförflyttas till L .

Bland alla vektorer som ligger på L väljer vi en vektor $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$. Alla andra vektorer som också ligger på L är då parallella med $\mathbf{e}$, och kan därför på ett entydigt vis skrivas

$$\mathbf{v} = x\mathbf{e},$$

där x är ett reellt tal. Vi säger att $\mathbf{e}$ är en *bas för (vektorerna på) L* och att x är *koordinaten för $\mathbf{v}$ i basen $\mathbf{e}$* .

Vektorer som ligger på en linje

Låt L vara en linje i rummet. Vi säger att en vektor v *ligger på* L , om v kan parallellförflyttas till L .

Bland alla vektorer som ligger på L väljer vi en vektor $e \neq \mathbf{0}$. Alla andra vektorer som också ligger på L är då parallella med e , och kan därför på ett entydigt vis skrivas

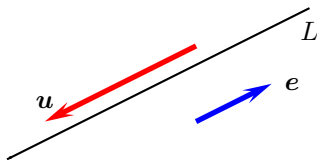
$$v = xe,$$

där x är ett reellt tal. Vi säger att e är en *bas för (vektorerna på) L* och att x är *koordinaten för v i basen e* .

Exempel

Vektorn e ligger på L (eftersom den kan parallellförflyttas till L). Vektorn $u = -2e$ har koordinaten -2 i basen e .

Vektorn e har koordinaten 1 i basen e , eftersom $e = 1 \cdot e$.



Vektorer som ligger i ett plan

Låt M vara ett plan i rummet. Vi säger att en vektor $\boldsymbol{v}$ *ligger i* M , om $\boldsymbol{v}$ kan parallellförflyttas till M .

Vektorer som ligger i ett plan

Låt M vara ett plan i rummet. Vi säger att en vektor $\boldsymbol{v}$ *ligger i M* , om $\boldsymbol{v}$ kan parallellförflyttas till M .

Bland alla vektorer som ligger i M väljer vi två vektorer $\boldsymbol{e}_1$ och $\boldsymbol{e}_2$ så att de *inte* är parallella. Eftersom nollvektorn $\mathbf{0}$ är parallell med alla vektorer, måste $\boldsymbol{e}_1 \neq \mathbf{0}$ och $\boldsymbol{e}_2 \neq \mathbf{0}$ (ty annars blir $\boldsymbol{e}_1$ och $\boldsymbol{e}_2$ parallella).

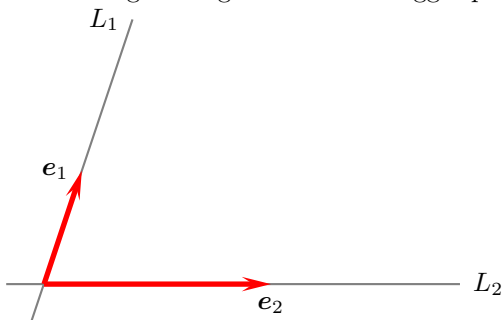


Vektorer som ligger i ett plan

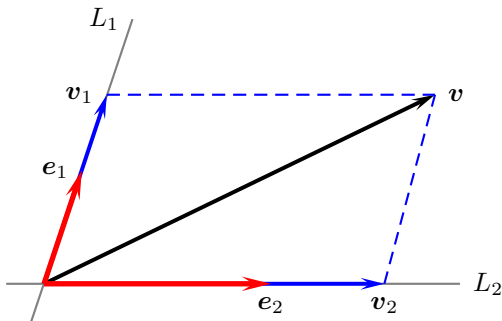
Låt M vara ett plan i rummet. Vi säger att en vektor $\mathbf{v}$ *ligger i* M , om $\mathbf{v}$ kan parallellförflyttas till M .

Bland alla vektorer som ligger i M väljer vi två vektorer $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ så att de *inte* är parallella. Eftersom nollvektorn $\mathbf{0}$ är parallell med alla vektorer, måste $\mathbf{e}_1 \neq \mathbf{0}$ och $\mathbf{e}_2 \neq \mathbf{0}$ (ty annars blir $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ parallella).

Välj två linjer L_1 och L_2 i M så att $\mathbf{e}_1$ ligger på L_1 och $\mathbf{e}_2$ ligger på L_2 . Då kan vi se det som om $\mathbf{e}_1$ är en bas för L_1 och $\mathbf{e}_2$ en bas för L_2 , enligt resonemanget kring vektorer som ligger på en linje.

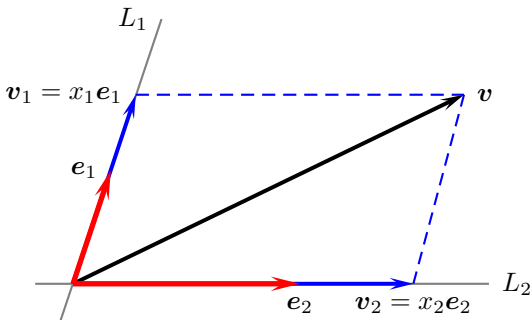


En godtycklig vektor $\mathbf{v}$ som ligger i M kan, på ett entydigt vis, skrivas som $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, där $\mathbf{v}_1$ ligger på L_1 och $\mathbf{v}_2$ ligger på L_2 ($\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ kallas *komponenter*).



En godtycklig vektor $\mathbf{v}$ som ligger i M kan, på ett entydigt vis, skrivas som $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, där $\mathbf{v}_1$ ligger på L_1 och $\mathbf{v}_2$ ligger på L_2 ($\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ kallas *komposanter*).

Eftersom $\mathbf{e}_1$ är en bas för L_1 , finns ett entydigt bestämt reellt tal x_1 så att $\mathbf{v}_1 = x_1 \mathbf{e}_1$. Av samma anledning finns ett entydigt bestämt reellt tal x_2 så att $\mathbf{v}_2 = x_2 \mathbf{e}_2$.

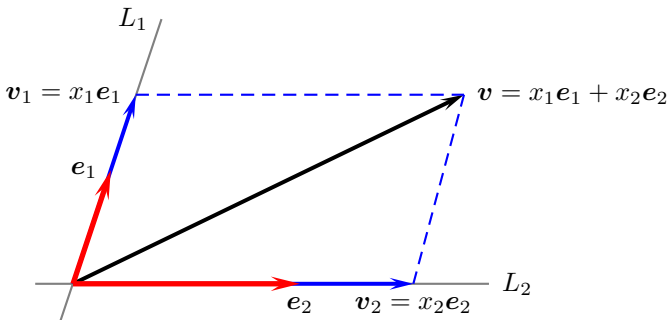


En godtycklig vektor $\mathbf{v}$ som ligger i M kan, på ett entydigt vis, skrivas som $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, där $\mathbf{v}_1$ ligger på L_1 och $\mathbf{v}_2$ ligger på L_2 ($\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ kallas *komposanter*).

Eftersom $\mathbf{e}_1$ är en bas för L_1 , finns ett entydigt bestämt reellt tal x_1 så att $\mathbf{v}_1 = x_1 \mathbf{e}_1$. Av samma anledning finns ett entydigt bestämt reellt tal x_2 så att $\mathbf{v}_2 = x_2 \mathbf{e}_2$.

Slutsatsen blir att det finns entydigt bestämda tal x_1, x_2 så att

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2.$$



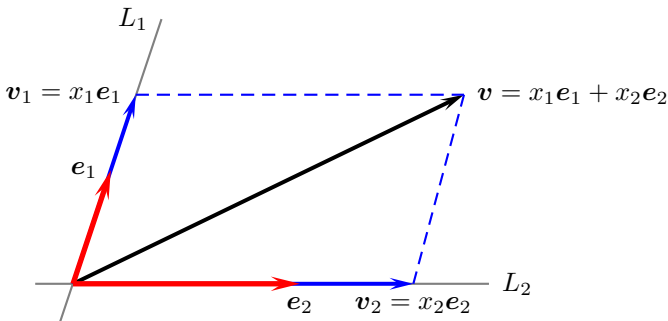
En godtycklig vektor $\mathbf{v}$ som ligger i M kan, på ett entydigt vis, skrivas som $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, där $\mathbf{v}_1$ ligger på L_1 och $\mathbf{v}_2$ ligger på L_2 ($\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ kallas *komposanter*).

Eftersom $\mathbf{e}_1$ är en bas för L_1 , finns ett entydigt bestämt reellt tal x_1 så att $\mathbf{v}_1 = x_1 \mathbf{e}_1$. Av samma anledning finns ett entydigt bestämt reellt tal x_2 så att $\mathbf{v}_2 = x_2 \mathbf{e}_2$.

Slutsatsen blir att det finns entydigt bestämda tal x_1, x_2 så att

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2.$$

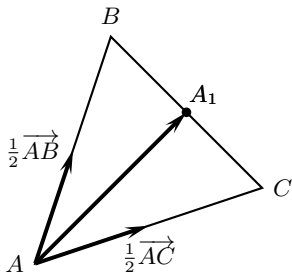
Vi säger att $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ är en *bas för (vektorerna i) M* och att att (x_1, x_2) är *koordinaterna* för $\mathbf{v}$ i denna bas.



Exempel

I ett exempel från förra föreläsningen härledde vi mittpunktsformeln, som säger att om ABC är en triangel och A_1 mittpunkten på sidan BC , så kan vektorn $\overrightarrow{AA_1}$ uttryckas i termer av $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$ som

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

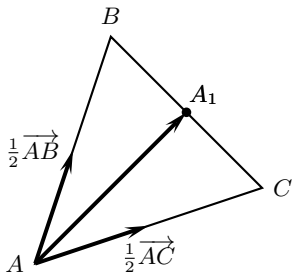


Exempel

I ett exempel från förra föreläsningen härledde vi mittpunktsformeln, som säger att om ABC är en triangel och A_1 mittpunkten på sidan BC , så kan vektorn $\overrightarrow{AA_1}$ uttryckas i termer av $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$ som

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

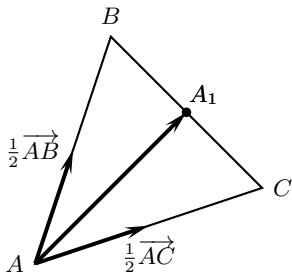
Vektorerna $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$ är inte parallella, så $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ kan användas som en bas för det plan i vilket triangeln ligger. Av mittpunktsformeln följer därmed att $\overrightarrow{AA_1}$ i denna bas har koordinaterna $(1/2, 1/2)$.



Exempel

I ett exempel från förra föreläsningen härledde vi mittpunktsformeln, som säger att om ABC är en triangel och A_1 mittpunkten på sidan BC , så kan vektorn $\overrightarrow{AA_1}$ uttryckas i termer av $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$ som

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$



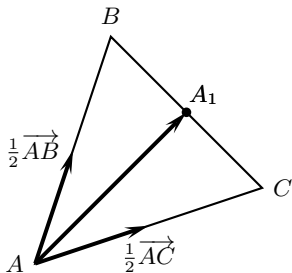
Vektorerna $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$ är inte parallella, så $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ kan användas som en bas för det plan i vilket triangeln ligger. Av mittpunktsformeln följer därmed att $\overrightarrow{AA_1}$ i denna bas har koordinaterna $(1/2, 1/2)$.

Vilka koordinater har vektorn $\overrightarrow{BC}$ i samma bas?

Exempel

I ett exempel från förra föreläsningen härledde vi mittpunktsformeln, som säger att om ABC är en triangel och A_1 mittpunkten på sidan BC , så kan vektorn $\overrightarrow{AA_1}$ uttryckas i termer av $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$ som

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$



Vektorerna $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$ är inte parallella, så $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ kan användas som en bas för det plan i vilket triangeln ligger. Av mittpunktsformeln följer därmed att $\overrightarrow{AA_1}$ i denna bas har koordinaterna $(1/2, 1/2)$.

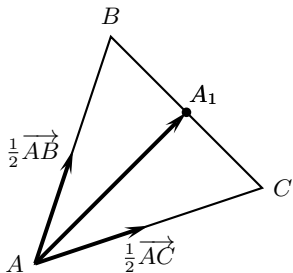
Vilka koordinater har vektorn $\overrightarrow{BC}$ i samma bas?

Eftersom $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = (-1) \cdot \overrightarrow{AB} + 1 \cdot \overrightarrow{AC}$, så har $\overrightarrow{BC}$ koordinaterna $(-1, 1)$ i basen $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Exempel

I ett exempel från förra föreläsningen härledde vi mittpunktsformeln, som säger att om ABC är en triangel och A_1 mittpunkten på sidan BC , så kan vektorn $\overrightarrow{AA_1}$ uttryckas i termer av $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$ som

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$



Vektorerna $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$ är inte parallella, så $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ kan användas som en bas för det plan i vilket triangeln ligger. Av mittpunktsformeln följer därmed att $\overrightarrow{AA_1}$ i denna bas har koordinaterna $(1/2, 1/2)$.

Vilka koordinater har vektorn $\overrightarrow{BC}$ i samma bas?

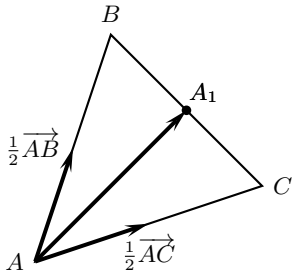
Eftersom $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = (-1) \cdot \overrightarrow{AB} + 1 \cdot \overrightarrow{AC}$, så har $\overrightarrow{BC}$ koordinaterna $(-1, 1)$ i basen $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Vilka koordinater har vektorn $\overrightarrow{AB}$?

Exempel

I ett exempel från förra föreläsningen härledde vi mittpunktsformeln, som säger att om ABC är en triangel och A_1 mittpunkten på sidan BC , så kan vektorn $\overrightarrow{AA_1}$ uttryckas i termer av $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$ som

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$



Vektorerna $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$ är inte parallella, så $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ kan användas som en bas för det plan i vilket triangeln ligger. Av mittpunktsformeln följer därmed att $\overrightarrow{AA_1}$ i denna bas har koordinaterna $(1/2, 1/2)$.

Vilka koordinater har vektorn $\overrightarrow{BC}$ i samma bas?

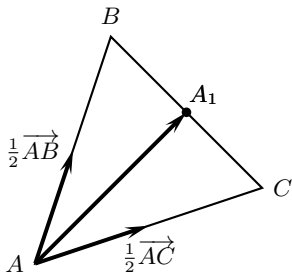
Eftersom $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = (-1) \cdot \overrightarrow{AB} + 1 \cdot \overrightarrow{AC}$, så har $\overrightarrow{BC}$ koordinaterna $(-1, 1)$ i basen $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Vilka koordinater har vektorn $\overrightarrow{AB}$? Svar: $(1, 0)$

Exempel

I ett exempel från förra föreläsningen härledde vi mittpunktsformeln, som säger att om ABC är en triangel och A_1 mittpunkten på sidan BC , så kan vektorn $\overrightarrow{AA_1}$ uttryckas i termer av $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$ som

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$



Vektorerna $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$ är inte parallella, så $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ kan användas som en bas för det plan i vilket triangeln ligger. Av mittpunktsformeln följer därmed att $\overrightarrow{AA_1}$ i denna bas har koordinaterna $(1/2, 1/2)$.

Vilka koordinater har vektorn $\overrightarrow{BC}$ i samma bas?

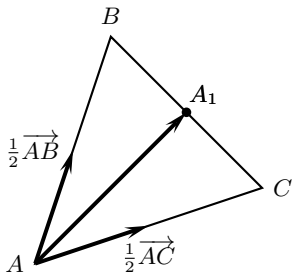
Eftersom $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = (-1) \cdot \overrightarrow{AB} + 1 \cdot \overrightarrow{AC}$, så har $\overrightarrow{BC}$ koordinaterna $(-1, 1)$ i basen $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Vilka koordinater har vektorn $\overrightarrow{AB}$? Svar: $(1, 0)$
vektorn $\overrightarrow{CA}$?

Exempel

I ett exempel från förra föreläsningen härledde vi mittpunktsformeln, som säger att om ABC är en triangel och A_1 mittpunkten på sidan BC , så kan vektorn $\overrightarrow{AA_1}$ uttryckas i termer av $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$ som

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$



Vektorerna $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$ är inte parallella, så $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ kan användas som en bas för det plan i vilket triangeln ligger. Av mittpunktsformeln följer därmed att $\overrightarrow{AA_1}$ i denna bas har koordinaterna $(1/2, 1/2)$.

Vilka koordinater har vektorn $\overrightarrow{BC}$ i samma bas?

Eftersom $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = (-1) \cdot \overrightarrow{AB} + 1 \cdot \overrightarrow{AC}$, så har $\overrightarrow{BC}$ koordinaterna $(-1, 1)$ i basen $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

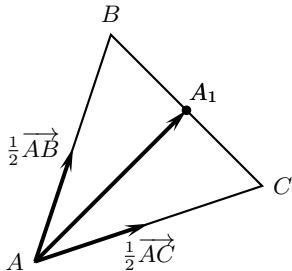
Vilka koordinater har vektorn $\overrightarrow{AB}$? Svar: $(1, 0)$

vektorn $\overrightarrow{CA}$? Svar: $(0, -1)$

Exempel

I ett exempel från förra föreläsningen härledde vi mittpunktsformeln, som säger att om ABC är en triangel och A_1 mittpunkten på sidan BC , så kan vektorn $\overrightarrow{AA_1}$ uttryckas i termer av $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$ som

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$



Vektorerna $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$ är inte parallella, så $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ kan användas som en bas för det plan i vilket triangeln ligger. Av mittpunktsformeln följer därmed att $\overrightarrow{AA_1}$ i denna bas har koordinaterna $(1/2, 1/2)$.

Vilka koordinater har vektorn $\overrightarrow{BC}$ i samma bas?

Eftersom $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = (-1) \cdot \overrightarrow{AB} + 1 \cdot \overrightarrow{AC}$, så har $\overrightarrow{BC}$ koordinaterna $(-1, 1)$ i basen $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Vilka koordinater har vektorn $\overrightarrow{AB}$? Svar: $(1, 0)$

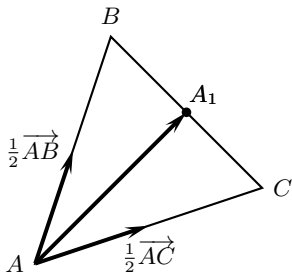
vektorn $\overrightarrow{CA}$? Svar: $(0, -1)$

nollvektorn?

Exempel

I ett exempel från förra föreläsningen härledde vi mittpunktsformeln, som säger att om ABC är en triangel och A_1 mittpunkten på sidan BC , så kan vektorn $\overrightarrow{AA_1}$ uttryckas i termer av $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$ som

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$



Vektorerna $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$ är inte parallella, så $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ kan användas som en bas för det plan i vilket triangeln ligger. Av mittpunktsformeln följer därmed att $\overrightarrow{AA_1}$ i denna bas har koordinaterna $(1/2, 1/2)$.

Vilka koordinater har vektorn $\overrightarrow{BC}$ i samma bas?

Eftersom $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = (-1) \cdot \overrightarrow{AB} + 1 \cdot \overrightarrow{AC}$, så har $\overrightarrow{BC}$ koordinaterna $(-1, 1)$ i basen $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

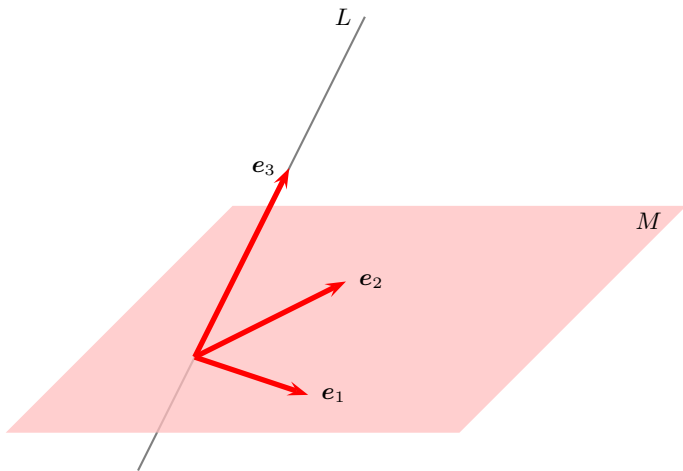
Vilka koordinater har vektorn $\overrightarrow{AB}$? Svar: $(1, 0)$

vektorn $\overrightarrow{CA}$? Svar: $(0, -1)$

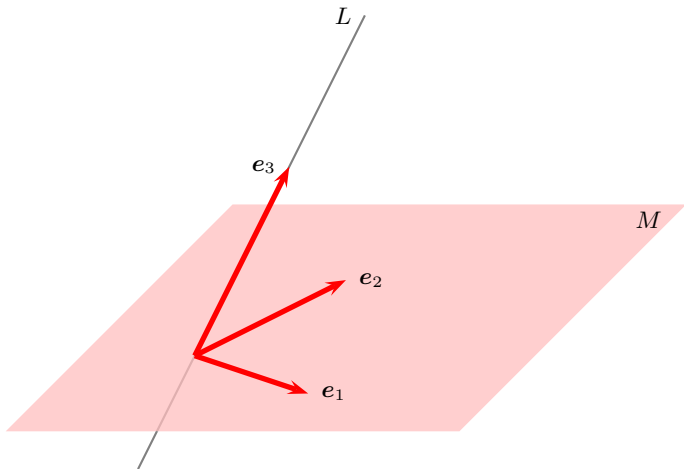
nollvektorn? Svar: $(0, 0)$

Vektorer i rummet

Låt e_1 , e_2 och e_3 vara vektorer i rummet som inte alla ligger i ett och samma plan. (Detta utesluter att någon av dem är nollvektorn.) Om M är ett plan, i vilket e_1 och e_2 ligger, så kan alltså inte också e_3 ligga i detta plan. Låt L vara en linje på vilken e_3 ligger.

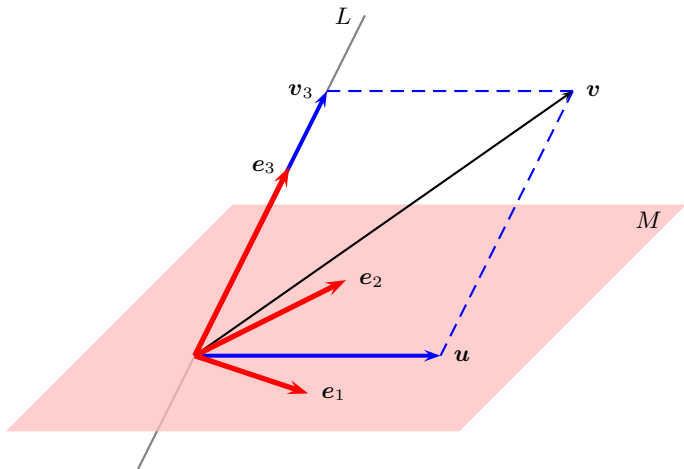


Vektorerna e_1 och e_2 kan inte vara parallella. Efter vad vi såg tidigare kan därför (e_1, e_2) användas som en bas för planet M . Vidare är e_3 en bas för linjen L .

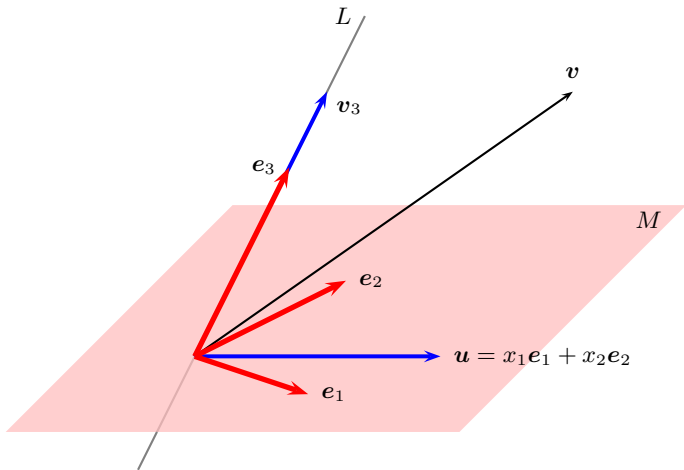


Vektorerna e_1 och e_2 kan inte vara parallella. Efter vad vi såg tidigare kan därför (e_1, e_2) användas som en bas för planet M . Vidare är e_3 en bas för linjen L .

Låt nu v vara en godtycklig vektor i rummet. Vi kan då på ett entydigt sätt skriva $v = u + v_3$, där u ligger i M och v_3 ligger på L .

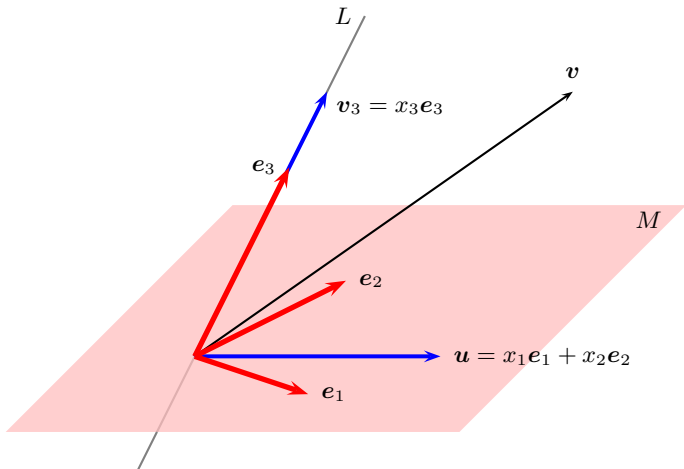


Eftersom $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ är en bas för M , finns entydigt bestämda tal x_1 och x_2 , så att $\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$, enligt resonemanget kring vektorer som ligger i ett plan.



Eftersom $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ är en bas för M , finns entydigt bestämda tal x_1 och x_2 , så att $\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$, enligt resonemanget kring vektorer som ligger i ett plan.

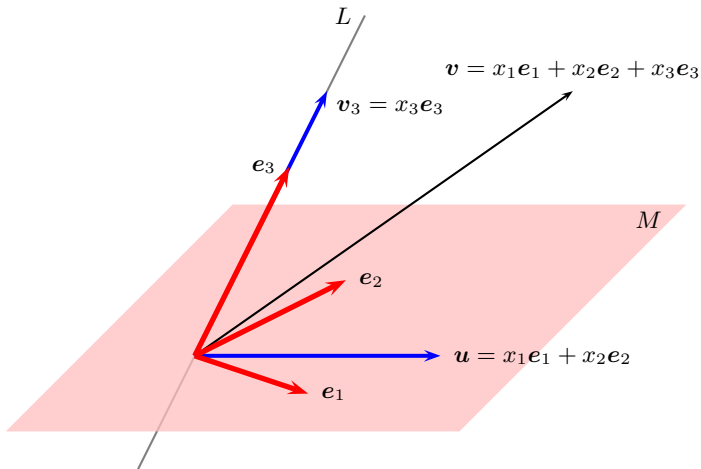
Motsvarande resonemang för vektorer som ligger på en linje ger att $\mathbf{v}_3 = x_3\mathbf{e}_3$, där talet x_3 är entydigt bestämt.



Detta ger att $\mathbf{v}$ på ett entydigt sätt kan skrivas

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{v}_3 = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3.$$

Vi säger att $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ är en *bas för rummets vektorer*, och att (x_1, x_2, x_3) är *koordinaterna* för $\mathbf{v}$ i denna bas.



Ofta är det underförstått vilken bas $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ för rummets vektorer som använder sig av, och då brukar man kortare skriva

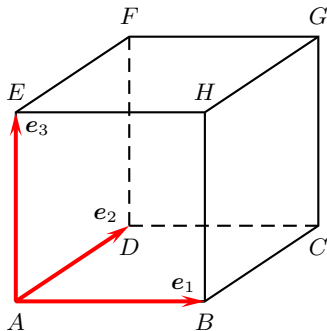
$$\mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3)$$

i stället för det mer korrekta $\mathbf{v} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$.

På samma skriver man kortare $\mathbf{v} = (x_1, x_2)$ för en vektor i planet, om det är underförstått vilken bas man använder sig av där.

Exempel

I en kub, som den i figuren till höger, finns det fyra rymddiagonaler i form av $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{CE}$ och $\overrightarrow{DH}$. Vilka koordinater har var och en av dessa vektorer i basen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, där $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{AD}$ och $\mathbf{e}_3 = \overrightarrow{AE}$?



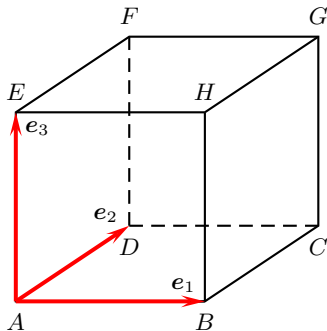
Exempel

I en kub, som den i figuren till höger, finns det fyra rymddiagonaler i form av $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{CE}$ och $\overrightarrow{DH}$. Vilka koordinater har var och en av dessa vektorer i basen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, där $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{AD}$ och $\mathbf{e}_3 = \overrightarrow{AE}$?

Vi kan t.ex. skriva

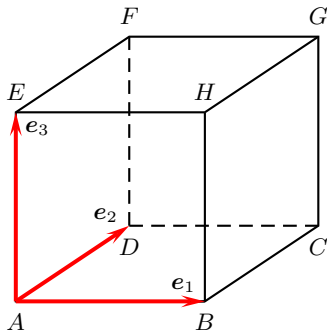
$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 = 1 \cdot \mathbf{e}_1 + 1 \cdot \mathbf{e}_2 + 1 \cdot \mathbf{e}_3,$$

så $\overrightarrow{AG} = (1, 1, 1)$ i basen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.



Exempel

I en kub, som den i figuren till höger, finns det fyra rymddiagonaler i form av $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{CE}$ och $\overrightarrow{DH}$. Vilka koordinater har var och en av dessa vektorer i basen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, där $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{AD}$ och $\mathbf{e}_3 = \overrightarrow{AE}$?



Vi kan t.ex. skriva

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 = 1 \cdot \mathbf{e}_1 + 1 \cdot \mathbf{e}_2 + 1 \cdot \mathbf{e}_3,$$

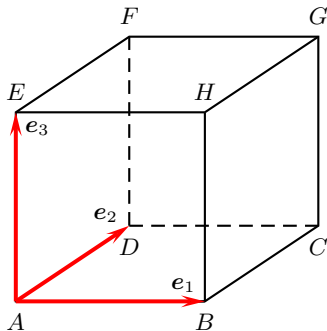
så $\overrightarrow{AG} = (1, 1, 1)$ i basen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Vidare är

$$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GF} = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + (-\mathbf{e}_1) = (-1) \cdot \mathbf{e}_1 + 1 \cdot \mathbf{e}_2 + 1 \cdot \mathbf{e}_3,$$

vilket ger att $\overrightarrow{BF} = (-1, 1, 1)$.

Exempel

I en kub, som den i figuren till höger, finns det fyra rymddiagonaler i form av $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{CE}$ och $\overrightarrow{DH}$. Vilka koordinater har var och en av dessa vektorer i basen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, där $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{AD}$ och $\mathbf{e}_3 = \overrightarrow{AE}$?



Vi kan t.ex. skriva

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 = 1 \cdot \mathbf{e}_1 + 1 \cdot \mathbf{e}_2 + 1 \cdot \mathbf{e}_3,$$

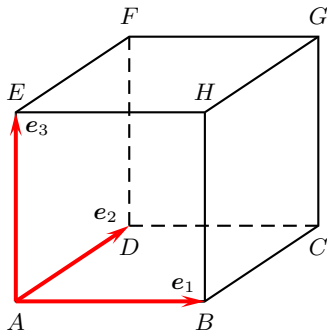
så $\overrightarrow{AG} = (1, 1, 1)$ i basen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Vidare är

$$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GF} = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + (-\mathbf{e}_1) = (-1) \cdot \mathbf{e}_1 + 1 \cdot \mathbf{e}_2 + 1 \cdot \mathbf{e}_3,$$

vilket ger att $\overrightarrow{BF} = (-1, 1, 1)$. På liknande sätt inses att $\overrightarrow{CE} = (-1, -1, 1)$

Exempel

I en kub, som den i figuren till höger, finns det fyra rymddiagonaler i form av $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{CE}$ och $\overrightarrow{DH}$. Vilka koordinater har var och en av dessa vektorer i basen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, där $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{AD}$ och $\mathbf{e}_3 = \overrightarrow{AE}$?



Vi kan t.ex. skriva

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 = 1 \cdot \mathbf{e}_1 + 1 \cdot \mathbf{e}_2 + 1 \cdot \mathbf{e}_3,$$

så $\overrightarrow{AG} = (1, 1, 1)$ i basen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Vidare är

$$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GF} = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + (-\mathbf{e}_1) = (-1) \cdot \mathbf{e}_1 + 1 \cdot \mathbf{e}_2 + 1 \cdot \mathbf{e}_3,$$

vilket ger att $\overrightarrow{BF} = (-1, 1, 1)$. På liknande sätt inses att $\overrightarrow{CE} = (-1, -1, 1)$ och $\overrightarrow{DH} = (1, -1, 1)$.

Genom att använda sig av baser och koordinater, får man nu enkla och naturliga formler för hur man adderar/subtraherar vektorer eller multiplicerar en vektor med ett tal.

Genom att använda sig av baser och koordinater, får man nu enkla och naturliga formler för hur man adderar/subtraherar vektorer eller multiplicerar en vektor med ett tal.

Sats

Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara vektorer i rummet och s ett reellt tal. Antag att $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3)$ och $\mathbf{v} = (y_1, y_2, y_3)$ i någon given bas för rummets vektorer. Då blir koordinaterna för $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ och $s\mathbf{u}$ i samma bas

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3),$$

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3) \text{ respektive}$$

$$s\mathbf{u} = (sx_1, sx_2, sx_3).$$

Genom att använda sig av baser och koordinater, får man nu enkla och naturliga formler för hur man adderar/subtraherar vektorer eller multiplicerar en vektor med ett tal.

Sats

Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara vektorer i rummet och s ett reellt tal. Antag att $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3)$ och $\mathbf{v} = (y_1, y_2, y_3)$ i någon given bas för rummets vektorer. Då blir koordinaterna för $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ och $s\mathbf{u}$ i samma bas

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3),$$

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3) \text{ respektive}$$

$$s\mathbf{u} = (sx_1, sx_2, sx_3).$$

Exempel

Antag att $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$ och $\mathbf{v} = (-1, 3, -2)$ i en given bas för rummets vektorer. Då blir i samma bas

$$2\mathbf{u} + 3\mathbf{v} = 2(1, 2, 3) + 3(-1, 3, -2) = (2, 4, 6) + (-3, 9, -6) = (-1, 13, 0).$$

Koordinatsystem

Med hjälp av en bas $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ kan vi uttrycka alla vektorer i rummet. Ofta vill man också kunna lokalisera punkter. Detta kan göras på följande vis.

- Fixera en punkt O i rummet. Vi kallar denna punkt *origo*. Det är nu möjligt att lokalisera en godtycklig punkt P i rummet, genom att med hjälp av vektorerna i basen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ ange hur den ligger i förhållande till origo.

Koordinatsystem

Med hjälp av en bas $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ kan vi uttrycka alla vektorer i rummet. Ofta vill man också kunna lokalisera punkter. Detta kan göras på följande vis.

- Fixera en punkt O i rummet. Vi kallar denna punkt *origo*. Det är nu möjligt att lokalisera en godtycklig punkt P i rummet, genom att med hjälp av vektorerna i basen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ ange hur den ligger i förhållande till origo.
- Bilda nämligen den så kallade *ortsvektorn* för P . Med denna avses den vektor som kan representeras av den riktade sträckan $\overrightarrow{OP}$.

Koordinatsystem

Med hjälp av en bas $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ kan vi uttrycka alla vektorer i rummet. Ofta vill man också kunna lokalisera punkter. Detta kan göras på följande vis.

- Fixera en punkt O i rummet. Vi kallar denna punkt *origo*. Det är nu möjligt att lokalisera en godtycklig punkt P i rummet, genom att med hjälp av vektorerna i basen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ ange hur den ligger i förhållande till origo.
- Bilda nämligen den så kallade *ortsvektorn* för P . Med denna avses den vektor som kan representeras av den riktade sträckan $\overrightarrow{OP}$.
- Eftersom $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ är en bas för rummets vektorer, finns entydigt bestämda tal x_1, x_2, x_3 så att

$$\overrightarrow{OP} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3.$$

Koordinatsystem

Med hjälp av en bas $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ kan vi uttrycka alla vektorer i rummet. Ofta vill man också kunna lokalisera punkter. Detta kan göras på följande vis.

- Fixera en punkt O i rummet. Vi kallar denna punkt *origo*. Det är nu möjligt att lokalisera en godtycklig punkt P i rummet, genom att med hjälp av vektorerna i basen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ ange hur den ligger i förhållande till origo.
- Bilda nämligen den så kallade *ortsvektorn* för P . Med denna avses den vektor som kan representeras av den riktade sträckan $\overrightarrow{OP}$.
- Eftersom $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ är en bas för rummets vektorer, finns entydigt bestämda tal x_1, x_2, x_3 så att

$$\overrightarrow{OP} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3.$$

- Med *koordinaterna för punkten P* menar vi koordinaterna för P :s ortsvektor, d.v.s. $P = (x_1, x_2, x_3)$.

Koordinatsystem

Med hjälp av en bas $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ kan vi uttrycka alla vektorer i rummet. Ofta vill man också kunna lokalisera punkter. Detta kan göras på följande vis.

- Fixera en punkt O i rummet. Vi kallar denna punkt *origo*. Det är nu möjligt att lokalisera en godtycklig punkt P i rummet, genom att med hjälp av vektorerna i basen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ ange hur den ligger i förhållande till origo.
- Bilda nämligen den så kallade *ortsvektorn* för P . Med denna avses den vektor som kan representeras av den riktade sträckan $\overrightarrow{OP}$.
- Eftersom $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ är en bas för rummets vektorer, finns entydigt bestämda tal x_1, x_2, x_3 så att

$$\overrightarrow{OP} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3.$$

- Med *koordinaterna för punkten P* menar vi koordinaterna för P 's ortsvektor, d.v.s. $P = (x_1, x_2, x_3)$.
- Vi säger att $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ är ett *koordinatsystem* för rummet, och att P har *koordinaterna* (x_1, x_2, x_3) i detta koordinatsystem.

Koordinatsystem

Med hjälp av en bas $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ kan vi uttrycka alla vektorer i rummet. Ofta vill man också kunna lokalisera punkter. Detta kan göras på följande vis.

- Fixera en punkt O i rummet. Vi kallar denna punkt *origo*. Det är nu möjligt att lokalisera en godtycklig punkt P i rummet, genom att med hjälp av vektorerna i basen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ ange hur den ligger i förhållande till origo.
- Bilda nämligen den så kallade *ortsvektorn* för P . Med denna avses den vektor som kan representeras av den riktade sträckan $\overrightarrow{OP}$.
- Eftersom $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ är en bas för rummets vektorer, finns entydigt bestämda tal x_1, x_2, x_3 så att

$$\overrightarrow{OP} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3.$$

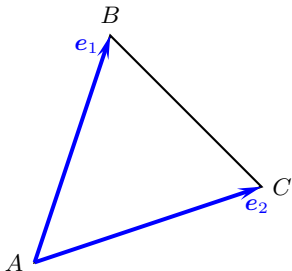
- Med *koordinaterna för punkten P* menar vi koordinaterna för P 's ortsvektor, d.v.s. $P = (x_1, x_2, x_3)$.
- Vi säger att $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ är ett *koordinatsystem* för rummet, och att P har *koordinaterna* (x_1, x_2, x_3) i detta koordinatsystem.

Ovanstående konstruktion kan givetvis även genomföras för punkter i planet.

Exempel

Låt ABC vara en triangel i planet. Vi väljer två av dess sidor $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{AC}$ en bas för vektorerna och punkten $O = A$ som origo. Då får punkten B koordinaterna $(1, 0)$ i koordinatsystemet $(A, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, ty för Ortsvektorn för B gäller att

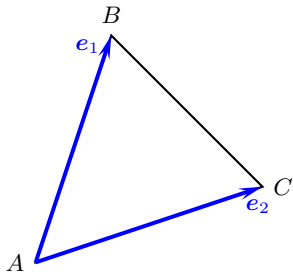
$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB} = 1 \cdot \mathbf{e}_1 + 0 \cdot \mathbf{e}_2.$$



Exempel

Låt ABC vara en triangel i planet. Vi väljer två av dess sidor $e_1 = \overrightarrow{AB}$, $e_2 = \overrightarrow{AC}$ en bas för vektorerna och punkten $O = A$ som origo. Då får punkten B koordinaterna $(1, 0)$ i koordinatsystemet (A, e_1, e_2) , ty för Ortsvektorn för B gäller att

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB} = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2.$$

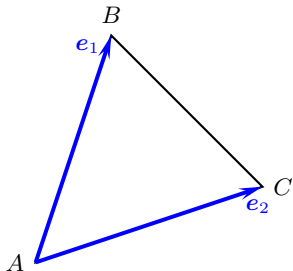


Vilka koordinater har B i koordinatsystemet (C, e_1, e_2) ?

Exempel

Låt ABC vara en triangel i planet. Vi väljer två av dess sidor $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{AC}$ en bas för vektorerna och punkten $O = A$ som origo. Då får punkten B koordinaterna $(1, 0)$ i koordinatsystemet $(A, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, ty för Ortsvektorn för B gäller att

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB} = 1 \cdot \mathbf{e}_1 + 0 \cdot \mathbf{e}_2.$$



Vilka koordinater har B i koordinatsystemet $(C, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$?. I detta fall tjänstgör punkten $O = C$ som origo, så Ortsvektorn för B blir

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2.$$

Alltså har vi $B = (1, -1)$ i koordinatsystemet $(C, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.

Linjärkombinationer

Definition (Linjärkombination)

Låt $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ vara vektorer i rummet, och låt $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ vara reella tal. Då kallas vektorn

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k$$

för en *linjärkombination* av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$.

Linjärkombinationer

Definition (Linjärkombination)

Låt $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ vara vektorer i rummet, och låt $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ vara reella tal. Då kallas vektorn

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k$$

för en *linjärkombination* av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$.

Exempel

I det tidigare exemplet med kuben så uttryckte vi var och en av rymddiagonalerna som en linjärkombination av basvektorerna $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Till exempel hade vi

$$\overrightarrow{BF} = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3,$$

d.v.s. $\overrightarrow{BF} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \lambda_3 \mathbf{e}_3$, där $\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Definition (Linjärt beroende)

En uppsättning vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$, där $k \geq 2$, säges vara *linjärt beroende*, om någon av dem kan skrivas som en linjärkombination av de övriga. En ensam vektor $\mathbf{v}_1$ är *linjärt beroende* om den är lika med nollvektorn.

Definition (Linjärt beroende)

En uppsättning vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$, där $k \geq 2$, säges vara *linjärt beroende*, om någon av dem kan skrivas som en linjärkombination av de övriga. En ensam vektor $\mathbf{v}_1$ är *linjärt beroende* om den är lika med nollvektorn.

Exempel

Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara två vektorer i rummet, och sätt $\mathbf{w} = 2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$. Eftersom $\mathbf{w}$ ju kan skrivas som en linjärkombination av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$, så är de tre vektorerna $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ linjärt beroende.

Definition (Linjärt beroende)

En uppsättning vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$, där $k \geq 2$, säges vara *linjärt beroende*, om någon av dem kan skrivas som en linjärkombination av de övriga. En ensam vektor $\mathbf{v}_1$ är *linjärt beroende* om den är lika med nollvektorn.

Exempel

Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara två vektorer i rummet, och sätt $\mathbf{w} = 2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$. Eftersom $\mathbf{w}$ ju kan skrivas som en linjärkombination av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$, så är de tre vektorerna $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ linjärt beroende.

Definition (Linjärt oberoende)

En uppsättning vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ (där $k \geq 1$) som inte är linjärt beroende, säges vara *linjärt oberoende*.

Sats

Vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ är linjärt beroende, om och endast om det finns reella tal $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, som inte alla är lika med 0, så att

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

Sats

Vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ är linjärt beroende, om och endast om det finns reella tal $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, som inte alla är lika med 0, så att

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

För att bevisa denna sats, behöver vi bevisa två saker (på grund av frasen ”om och endast om”):

Sats

Vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ är linjärt beroende, om och endast om det finns reella tal $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, som inte alla är lika med 0, så att

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

För att bevisa denna sats, behöver vi bevisa två saker (på grund av frasen ”om och endast om”):

1. Om $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ är linjärt beroende, så finns det reella tal $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, som inte alla är lika med 0, och som uppfyller $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$.

Sats

Vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ är linjärt beroende, om och endast om det finns reella tal $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, som inte alla är lika med 0, så att

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

För att bevisa denna sats, behöver vi bevisa två saker (på grund av frasen ”om och endast om”):

1. Om $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ är linjärt beroende, så finns det reella tal $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, som inte alla är lika med 0, och som uppfyller $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$.
2. Om det finns reella tal $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, som inte alla är lika med 0 och som uppfyller $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$, så är $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ linjärt beroende.

Bevis av 1: Antag att $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ är linjärt beroende. Vi ska bevisa att det finns en linjärkombination $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k$ som blir nollvektorn, utan att alla $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ är noll.

Bevis av 1: Antag att $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ är linjärt beroende. Vi ska bevisa att det finns en linjärkombination $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k$ som blir nollvektorn, utan att alla $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ är noll. Eftersom $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ är linjärt beroende, så kan någon av dessa k vektorer skrivas som en linjärkombination av de övriga (enligt definitionen av ”linjärt beroende”). Vi kan anta att detta gäller för $\mathbf{v}_1$ (skulle det inte vara så, kan vi alltid numrera om vektorerna så att det blir på detta vis).

Bevis av 1: Antag att $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ är linjärt beroende. Vi ska bevisa att det finns en linjärkombination $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k$ som blir nollvektorn, utan att alla $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ är noll. Eftersom $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ är linjärt beroende, så kan någon av dessa k vektorer skrivas som en linjärkombination av de övriga (enligt definitionen av "linjärt beroende"). Vi kan anta att detta gäller för $\mathbf{v}_1$ (skulle det inte vara så, kan vi alltid numrera om vektorerna så att det blir på detta vis). Alltså finns tal $\mu_2, \mu_3, \dots, \mu_k$ så att

$$\mathbf{v}_1 = \mu_2 \mathbf{v}_2 + \mu_3 \mathbf{v}_3 + \dots + \mu_k \mathbf{v}_k.$$

Bevis av 1: Antag att $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ är linjärt beroende. Vi ska bevisa att det finns en linjärkombination $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k$ som blir nollvektorn, utan att alla $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ är noll. Eftersom $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ är linjärt beroende, så kan någon av dessa k vektorer skrivas som en linjärkombination av de övriga (enligt definitionen av "linjärt beroende"). Vi kan anta att detta gäller för $\mathbf{v}_1$ (skulle det inte vara så, kan vi alltid numrera om vektorerna så att det blir på detta vis). Alltså finns tal $\mu_2, \mu_3, \dots, \mu_k$ så att

$$\mathbf{v}_1 = \mu_2 \mathbf{v}_2 + \mu_3 \mathbf{v}_3 + \dots + \mu_k \mathbf{v}_k.$$

Men då blir $\mathbf{v}_1 - \mu_2 \mathbf{v}_2 - \mu_3 \mathbf{v}_3 - \dots - \mu_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$, så om vi sätter $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_j = -\mu_j$ för $j = 2, 3, \dots, k$ så har vi hittat en linjärkombination av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$, som blir lika med nollvektorn, utan att alla koefficienter $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ är noll (vi har ju åtminstone $\lambda_1 = 1 \neq 0$).

Bevis av 2: Antag att det finns reella tal $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, inte alla lika med noll, så att

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

Vi ska bevisa att $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ är linjärt beroende, d.v.s. att någon av dessa vektorer kan skrivas som en linjärkombination av de övriga.

Bevis av 2: Antag att det finns reella tal $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, inte alla lika med noll, så att

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

Vi ska bevisa att $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ är linjärt beroende, d.v.s. att någon av dessa vektorer kan skrivas som en linjärkombination av de övriga. Vi vet att $\lambda_i \neq 0$ för minst ett i . Genom att eventuellt numrera om vektorerna (och tillhörande koefficienter) kan vi anta att $\lambda_1 \neq 0$.

Bevis av 2: Antag att det finns reella tal $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, inte alla lika med noll, så att

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

Vi ska bevisa att $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ är linjärt beroende, d.v.s. att någon av dessa vektorer kan skrivas som en linjärkombination av de övriga. Vi vet att $\lambda_i \neq 0$ för minst ett i . Genom att eventuellt numrera om vektorerna (och tillhörande koefficienter) kan vi anta att $\lambda_1 \neq 0$. Då blir

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 = -\lambda_2 \mathbf{v}_2 - \lambda_3 \mathbf{v}_3 - \dots - \lambda_k \mathbf{v}_k.$$

Bevis av 2: Antag att det finns reella tal $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, inte alla lika med noll, så att

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

Vi ska bevisa att $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ är linjärt beroende, d.v.s. att någon av dessa vektorer kan skrivas som en linjärkombination av de övriga. Vi vet att $\lambda_i \neq 0$ för minst ett i . Genom att eventuellt numrera om vektorerna (och tillhörande koefficienter) kan vi anta att $\lambda_1 \neq 0$. Då blir

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 = -\lambda_2 \mathbf{v}_2 - \lambda_3 \mathbf{v}_3 - \dots - \lambda_k \mathbf{v}_k.$$

Eftersom $\lambda_1 \neq 0$ kan vi dividera båda leden med λ_1 , vilket ger

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \mathbf{v}_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \mathbf{v}_3 - \dots - \frac{\lambda_k}{\lambda_1} \mathbf{v}_k.$$

Bevis av 2: Antag att det finns reella tal $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, inte alla lika med noll, så att

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

Vi ska bevisa att $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ är linjärt beroende, d.v.s. att någon av dessa vektorer kan skrivas som en linjärkombination av de övriga. Vi vet att $\lambda_i \neq 0$ för minst ett i . Genom att eventuellt numrera om vektorerna (och tillhörande koefficienter) kan vi anta att $\lambda_1 \neq 0$. Då blir

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 = -\lambda_2 \mathbf{v}_2 - \lambda_3 \mathbf{v}_3 - \dots - \lambda_k \mathbf{v}_k.$$

Eftersom $\lambda_1 \neq 0$ kan vi dividera båda leden med λ_1 , vilket ger

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \mathbf{v}_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \mathbf{v}_3 - \dots - \frac{\lambda_k}{\lambda_1} \mathbf{v}_k.$$

Här har vi lyckats skriva $\mathbf{v}_1$ som en linjärkombination av $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_k$, vilket bevisar att $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ är linjärt beroende. $\square$

Om man vill avgöra om en uppsättning av vektorer är linjärt beroende eller linjärt oberoende, så är den sats vi nyss har bevisat, d.v.s.

Sats

Vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ är linjärt beroende, om och endast om det finns reella tal $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, som inte alla är lika med 0, så att

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

inte så användbar, rent räknetekniskt. I regel använder man sig oftast av följande resultat:

Följdsats

Vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ är linjärt oberoende, om och endast om

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0} \quad \implies \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0.$$

Om man vill avgöra om en uppsättning av vektorer är linjärt beroende eller linjärt oberoende, så är den sats vi nyss har bevisat, d.v.s.

Sats

Vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ är linjärt beroende, om och endast om det finns reella tal $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, som inte alla är lika med 0, så att

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

inte så användbar, rent räknetekniskt. I regel använder man sig oftast av följande resultat:

Följdsats

Vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ är linjärt oberoende, om och endast om

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0} \quad \implies \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0.$$

Med andra ord: Om det *enda* sättet att skriva nollvektorn som en linjärkombination på formen $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k$ är att välja $\lambda_i = 0$ för alla i , så är $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ linjärt oberoende, i annat fall är de linjärt beroende.

Exempel

Vektorerna $\mathbf{u}_1 = (4, -1, -1)$, $\mathbf{u}_2 = (3, 2, 0)$ och $\mathbf{u}_3 = (-3, -2, 1)$ har alla sina koordinater givna i en och samma bas $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Är de linjärt beroende eller oberoende?

Exempel

Vektorerna $\mathbf{u}_1 = (4, -1, -1)$, $\mathbf{u}_2 = (3, 2, 0)$ och $\mathbf{u}_3 = (-3, -2, 1)$ har alla sina koordinater givna i en och samma bas $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Är de linjärt beroende eller oberoende?

Låt $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ vara tal sådana att $\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \lambda_3 \mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$. Sådana tal finns; vi kan ju alltid välja $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Exempel

Vektorerna $\mathbf{u}_1 = (4, -1, -1)$, $\mathbf{u}_2 = (3, 2, 0)$ och $\mathbf{u}_3 = (-3, -2, 1)$ har alla sina koordinater givna i en och samma bas $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Är de linjärt beroende eller oberoende?

Låt $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ vara tal sådana att $\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \lambda_3 \mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$. Sådana tal finns; vi kan ju alltid välja $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Om detta är det *enda* sättet att välja $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ på, så är $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ linjärt oberoende, i annat fall linjärt beroende.

Exempel

Vektorerna $\mathbf{u}_1 = (4, -1, -1)$, $\mathbf{u}_2 = (3, 2, 0)$ och $\mathbf{u}_3 = (-3, -2, 1)$ har alla sina koordinater givna i en och samma bas $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Är de linjärt beroende eller oberoende?

Låt $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ vara tal sådana att $\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \lambda_3 \mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$. Sådana tal finns; vi kan ju alltid välja $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Om detta är det *enda* sättet att välja $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ på, så är $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ linjärt oberoende, i annat fall linjärt beroende. Nu blir

$$\begin{aligned}\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \lambda_3 \mathbf{u}_3 &= \mathbf{0} \\ \iff \lambda_1(4, -1, -1) + \lambda_2(3, 2, 0) + \lambda_3(-3, -2, 1) &= (0, 0, 0)\end{aligned}$$

Exempel

Vektorerna $\mathbf{u}_1 = (4, -1, -1)$, $\mathbf{u}_2 = (3, 2, 0)$ och $\mathbf{u}_3 = (-3, -2, 1)$ har alla sina koordinater givna i en och samma bas $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Är de linjärt beroende eller oberoende?

Låt $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ vara tal sådana att $\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \lambda_3 \mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$. Sådana tal finns; vi kan ju alltid välja $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Om detta är det *enda* sättet att välja $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ på, så är $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ linjärt oberoende, i annat fall linjärt beroende. Nu blir

$$\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \lambda_3 \mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$$

$$\iff \lambda_1(4, -1, -1) + \lambda_2(3, 2, 0) + \lambda_3(-3, -2, 1) = (0, 0, 0)$$

$$\iff (4\lambda_1 + 3\lambda_2 - 3\lambda_3, -\lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_3, -\lambda_1 + \lambda_3) = (0, 0, 0)$$

Exempel

Vektorerna $\mathbf{u}_1 = (4, -1, -1)$, $\mathbf{u}_2 = (3, 2, 0)$ och $\mathbf{u}_3 = (-3, -2, 1)$ har alla sina koordinater givna i en och samma bas $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Är de linjärt beroende eller oberoende?

Låt $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ vara tal sådana att $\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \lambda_3 \mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$. Sådana tal finns; vi kan ju alltid välja $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Om detta är det *enda* sättet att välja $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ på, så är $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ linjärt oberoende, i annat fall linjärt beroende. Nu blir

$$\begin{aligned}\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \lambda_3 \mathbf{u}_3 &= \mathbf{0} \\ \iff \lambda_1(4, -1, -1) + \lambda_2(3, 2, 0) + \lambda_3(-3, -2, 1) &= (0, 0, 0) \\ \iff (4\lambda_1 + 3\lambda_2 - 3\lambda_3, -\lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_3, -\lambda_1 + \lambda_3) &= (0, 0, 0) \\ \iff \begin{cases} 4\lambda_1 + 3\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 \quad \quad + \lambda_3 = 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Exempel

Vektorerna $\mathbf{u}_1 = (4, -1, -1)$, $\mathbf{u}_2 = (3, 2, 0)$ och $\mathbf{u}_3 = (-3, -2, 1)$ har alla sina koordinater givna i en och samma bas $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Är de linjärt beroende eller oberoende?

Låt $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ vara tal sådana att $\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \lambda_3 \mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$. Sådana tal finns; vi kan ju alltid välja $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Om detta är det *enda* sättet att välja $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ på, så är $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ linjärt oberoende, i annat fall linjärt beroende. Nu blir

$$\begin{aligned}\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \lambda_3 \mathbf{u}_3 &= \mathbf{0} \\ \iff \lambda_1(4, -1, -1) + \lambda_2(3, 2, 0) + \lambda_3(-3, -2, 1) &= (0, 0, 0) \\ \iff (4\lambda_1 + 3\lambda_2 - 3\lambda_3, -\lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_3, -\lambda_1 + \lambda_3) &= (0, 0, 0) \\ \iff \begin{cases} 4\lambda_1 + 3\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 \quad \quad + \lambda_3 = 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Vi får ett homogent ekvationssystem att lösa (att det är homogent innebär att det är nollor i alla högerleden). Det visar sig att $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ är den enda lösningen till detta ekvationssystem. Alltså är $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ linjärt oberoende.

Anmärkning

Som bekant kan vi ju skriva ett linjärt ekvationssystem på matrisform, $AX = B$, där A är koefficientmatrisen. Ekvationssystemet

$$\begin{cases} 4\lambda_1 + 3\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 \quad \quad \quad + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

som vi fick i exemplet ovan har

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

som koefficientmatris.

Anmärkning

Som bekant kan vi ju skriva ett linjärt ekvationssystem på matrisform, $AX = B$, där A är koefficientmatrisen. Ekvationssystemet

$$\begin{cases} 4\lambda_1 + 3\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 \quad \quad + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

som vi fick i exemplet ovan har

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

som koefficientmatris.

Lägg märke till att kolonnerna i denna matris utgörs av koordinaterna för $\mathbf{u}_1 = (4, -1, -1)$, $\mathbf{u}_2 = (3, 2, 0)$ och $\mathbf{u}_3 = (-3, -2, 1)$. Detta är ingen tillfällighet; det går att bevisa att så alltid blir fallet!

Exempel

Avgör om $\mathbf{u}_1 = (1, -1, 3)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 5, 2)$ och $\mathbf{u}_3 = (2, 3, 8)$ är linjärt beroende eller oberoende. Koordinaterna antas vara givna i en och samma bas.

Exempel

Avgör om $\mathbf{u}_1 = (1, -1, 3)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 5, 2)$ och $\mathbf{u}_3 = (2, 3, 8)$ är linjärt beroende eller oberoende. Koordinaterna antas vara givna i en och samma bas.

Vi behöver lösa det homogena ekvationssystemet $AX = O$, där kolonnerna hos A är koordinaterna hos $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 5\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 8\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Exempel

Avgör om $\mathbf{u}_1 = (1, -1, 3)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 5, 2)$ och $\mathbf{u}_3 = (2, 3, 8)$ är linjärt beroende eller oberoende. Koordinaterna antas vara givna i en och samma bas.

Vi behöver lösa det homogena ekvationssystemet $AX = O$, där kolonnerna hos A är koordinaterna hos $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 5\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 8\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Vi får här att det finns oändligt många lösningar, och att dessa kan skrivas på parameterform som

$$\begin{cases} \lambda_1 = -2t \\ \lambda_2 = -t \\ \lambda_3 = t. \end{cases}$$

Exempel

Avgör om $\mathbf{u}_1 = (1, -1, 3)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 5, 2)$ och $\mathbf{u}_3 = (2, 3, 8)$ är linjärt beroende eller oberoende. Koordinaterna antas vara givna i en och samma bas.

Vi behöver lösa det homogena ekvationssystemet $AX = O$, där kolonnerna hos A är koordinaterna hos $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 5\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 8\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Vi får här att det finns oändligt många lösningar, och att dessa kan skrivas på parameterform som

$$\begin{cases} \lambda_1 = -2t \\ \lambda_2 = -t \\ \lambda_3 = t. \end{cases}$$

För t.ex. $t = -1$ blir $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$, och därmed $2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$. Vi kan alltså skriva $\mathbf{u}_3$ som en linjärkombination av $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$: $\mathbf{u}_3 = 2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$; vektorerna är linjärt beroende.

Följande geometriska tolkningar kan göras, av att en uppsättning av en eller flera vektorer är linjärt beroende:

- En vektor är linjärt beroende om och endast om den är nollvektorn

Följande geometriska tolkningar kan göras, av att en uppsättning av en eller flera vektorer är linjärt beroende:

- En vektor är linjärt beroende om och endast om den är nollvektorn
- Två vektorer är linjärt beroende om och endast om de är parallella

Följande geometriska tolkningar kan göras, av att en uppsättning av en eller flera vektorer är linjärt beroende:

- En vektor är linjärt beroende om och endast om den är nollvektorn
- Två vektorer är linjärt beroende om och endast om de är parallella
- Tre vektorer är linjärt beroende om och endast om de är parallella med samma plan

Följande geometriska tolkningar kan göras, av att en uppsättning av en eller flera vektorer är linjärt beroende:

- En vektor är linjärt beroende om och endast om den är nollvektorn
- Två vektorer är linjärt beroende om och endast om de är parallella
- Tre vektorer är linjärt beroende om och endast om de är parallella med samma plan
- Fyra eller fler vektorer i rummet är alltid linjärt beroende.