

Vektorgeometri för gymnasister

Per-Anders Svensson

<http://homepage.lnu.se/staff/psvmsi/vektorgeometri/gymnasiet.html>

Fakulteten för teknik
Linnéuniversitetet

Vektorer i planet och i rummet I

Innehåll

Riktade sträckor

Vektorer

Addition av vektorer

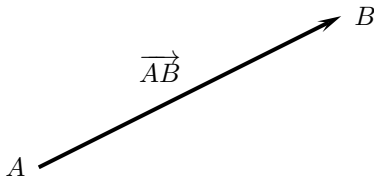
Multiplikation av vektor med skalär

Några räknelagar för vektorer

Riktade sträckor

Definition (Riktad sträcka)

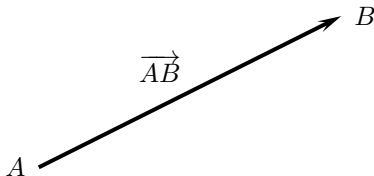
Låt A och B vara två punkter i rummet. Den *riktade sträckan* från A till B skrivs $\overrightarrow{AB}$ och illustreras med en pil.



Riktade sträckor

Definition (Riktad sträcka)

Låt A och B vara två punkter i rummet. Den *riktade sträckan* från A till B skrivs $\overrightarrow{AB}$ och illustreras med en pil.

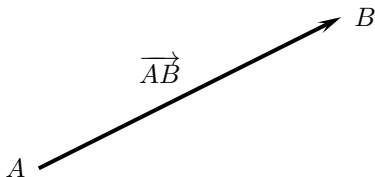


En riktad sträcka kan bestämmas entydigt genom att ange dess

Riktade sträckor

Definition (Riktad sträcka)

Låt A och B vara två punkter i rummet. Den *riktade sträckan* från A till B skrivs $\overrightarrow{AB}$ och illustreras med en pil.



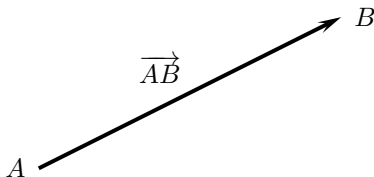
En riktad sträcka kan bestämmas entydigt genom att ange dess

- fotpunkt (punkten A ovan) – Var "börjar" sträckan?

Riktade sträckor

Definition (Riktad sträcka)

Låt A och B vara två punkter i rummet. Den *riktade sträckan* från A till B skrivs $\overrightarrow{AB}$ och illustreras med en pil.



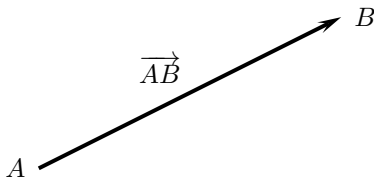
En riktad sträcka kan bestämmas entydigt genom att ange dess

- fotpunkt (punkten A ovan) – Var ”börjar” sträckan?
- riktning – Åt vilket håll ska vi förflytta oss från fotpunkten?

Riktade sträckor

Definition (Riktad sträcka)

Låt A och B vara två punkter i rummet. Den *riktade sträckan* från A till B skrivs $\overrightarrow{AB}$ och illustreras med en pil.



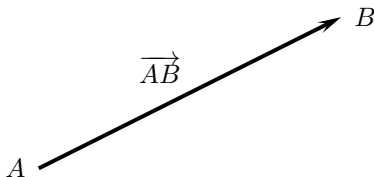
En riktad sträcka kan bestämmas entydigt genom att ange dess

- fotpunkt (punkten A ovan) – Var "börjar" sträckan?
- riktning – Åt vilket håll ska vi förflytta oss från fotpunkten?
- längd – Hur långt ska vi gå i denna riktning?

Riktade sträckor

Definition (Riktad sträcka)

Låt A och B vara två punkter i rummet. Den *riktade sträckan* från A till B skrivs $\overrightarrow{AB}$ och illustreras med en pil.



En riktad sträcka kan bestämmas entydigt genom att ange dess

- fotpunkt (punkten A ovan) – Var "börjar" sträckan?
- riktning – Åt vilket håll ska vi förflytta oss från fotpunkten?
- längd – Hur långt ska vi gå i denna riktning?

Om punkterna A och B sammanfaller, får vi en så kallad *nollsträcka* $\overrightarrow{AA}$. Denna har längden 0, men dock ingen riktning. Observera att $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$ (såvida inte $A = B$).

Vektorer

Definition (Vektor)

Mängden av alla riktade sträckor som har en och samma riktning och dessutom en och samma längd, kallas för en *vektor*.

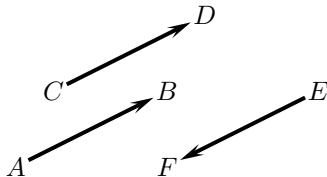
Vektorer

Definition (Vektor)

Mängden av alla riktade sträckor som har en och samma riktning och dessutom en och samma längd, kallas för en *vektor*.

Exempel

De riktade sträckorna $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{CD}$ har samma längd och riktning, och hör därför till samma vektor. Den riktade sträckan $\overrightarrow{EF}$ har längden men inte riktningen gemensam med $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{CD}$, och representerar därmed en annan vektor.



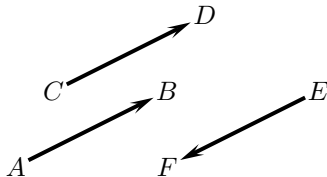
Vektorer

Definition (Vektor)

Mängden av alla riktade sträckor som har en och samma riktning och dessutom en och samma längd, kallas för en *vektor*.

Exempel

De riktade sträckorna $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{CD}$ har samma längd och riktning, och hör därför till samma vektor. Den riktade sträckan $\overrightarrow{EF}$ har längden men inte riktningen gemensam med $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{CD}$, och representerar därmed en annan vektor.



I boken betecknas vektorer med bokstäver som u , v , w . För att undvika förväxling mellan vektorer och tal, ser man i litteraturen ibland att man skriver i fetstil: $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, eller att man lägger till en liten pil ovanför bokstaven: $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$. Vi kommer att använda oss av beteckningen med fetstil i föreläsningsunderlagen.

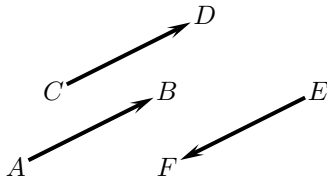
Vektorer

Definition (Vektor)

Mängden av alla riktade sträckor som har en och samma riktning och dessutom en och samma längd, kallas för en *vektor*.

Exempel

De riktade sträckorna $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{CD}$ har samma längd och riktning, och hör därför till samma vektor. Den riktade sträckan $\overrightarrow{EF}$ har längden men inte riktningen gemensam med $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{CD}$, och representerar därmed en annan vektor.



I boken betecknas vektorer med bokstäver som u , v , w . För att undvika förväxling mellan vektorer och tal, ser man i litteraturen ibland att man skriver i fetstil: $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, eller att man lägger till en liten pil ovanför bokstaven: $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$. Vi kommer att använda oss av beteckningen med fetstil i föreläsningsunderlagen.

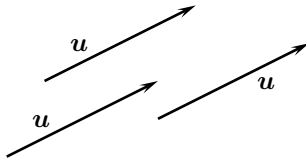
Om en viss riktad sträcka $\overrightarrow{AB}$ hör till en viss vektor, säger man ibland (litet slarvigt) "vektorn $\overrightarrow{AB}$ ".

Liksom med riktade sträckor, brukar man illustrera vektorer med hjälp av pilar. I och med att en vektor består av en massa riktade sträckor, som alla har riktningen och längden gemensam, kan man parallellförflytta varje sådan pil, utan att man ändrar på själva vektorn.

Liksom med riktade sträckor, brukar man illustrera vektorer med hjälp av pilar. I och med att en vektor består av en massa riktade sträckor, som alla har riktningen och längden gemensam, kan man parallellförflytta varje sådan pil, utan att man ändrar på själva vektorn.

Exempel

Pilarna nedan representerar alla en och samma vektor $\mathbf{u}$, eftersom de alla har samma riktning och längd.



Definition (Längd och riktning av vektor)

- *Längden* av en vektor $\mathbf{u}$ definieras som längden av någon av de riktade sträckor som tillhör $\mathbf{u}$. Denna betecknas $|\mathbf{u}|$. (En annan vanligt förekommande beteckning är $\|\mathbf{u}\|$.)

Definition (Längd och riktning av vektor)

- *Längden* av en vektor $\mathbf{u}$ definieras som längden av någon av de riktade sträckor som tillhör $\mathbf{u}$. Denna betecknas $|\mathbf{u}|$. (En annan vanligt förekommande beteckning är $\|\mathbf{u}\|$.)
- *Riktningen* hos en vektor $\mathbf{u}$ definieras som riktningen hos någon av dess riktade sträckor.

Definition (Längd och riktning av vektor)

- *Längden* av en vektor $\mathbf{u}$ definieras som längden av någon av de riktade sträckor som tillhör $\mathbf{u}$. Denna betecknas $|\mathbf{u}|$. (En annan vanligt förekommande beteckning är $\|\mathbf{u}\|$.)
- *Riktningen* hos en vektor $\mathbf{u}$ definieras som riktningen hos någon av dess riktade sträckor.

Definition (Nollvektor)

Nollvektorn är mängden av alla nollsträckor. Denna betecknas $\mathbf{0}$.

Definition (Längd och riktning av vektor)

- *Längden* av en vektor $\mathbf{u}$ definieras som längden av någon av de riktade sträckor som tillhör $\mathbf{u}$. Denna betecknas $|\mathbf{u}|$. (En annan vanligt förekommande beteckning är $\|\mathbf{u}\|$.)
- *Riktningen* hos en vektor $\mathbf{u}$ definieras som riktningen hos någon av dess riktade sträckor.

Definition (Nollvektor)

Nollvektorn är mängden av alla nollsträckor. Denna betecknas $\mathbf{0}$.

Anmärkning

I boken används beteckningen $\mathbf{0}$ för nollvektorn, med risk för att den kan förväxlas med talet 0. I litteraturen förekommer ibland beteckningen $\vec{0}$ för nollvektorn.

Definition (Längd och riktning av vektor)

- *Längden* av en vektor $\mathbf{u}$ definieras som längden av någon av de riktade sträckor som tillhör $\mathbf{u}$. Denna betecknas $|\mathbf{u}|$. (En annan vanligt förekommande beteckning är $\|\mathbf{u}\|$.)
- *Riktningen* hos en vektor $\mathbf{u}$ definieras som riktningen hos någon av dess riktade sträckor.

Definition (Nollvektor)

Nollvektorn är mängden av alla nollsträckor. Denna betecknas $\mathbf{0}$.

Anmärkning

I boken används beteckningen 0 för nollvektorn, med risk för att den kan förväxlas med talet 0 . I litteraturen förekommer ibland beteckningen $\vec{0}$ för nollvektorn.

Eftersom en nollsträcka saknar riktning, saknar även nollvektorn riktning. Vad beträffar längden av nollvektorn, så är givetvis $|\mathbf{0}| = 0$.

Addition av vektorer

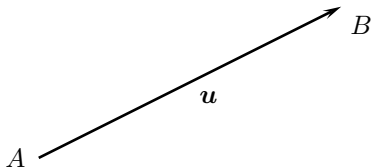
Definition (Summa av vektorer)

Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara två vektorer. Låt $\overrightarrow{AB}$ vara en riktad sträcka i $\mathbf{u}$ och låt $\overrightarrow{BC}$ vara den riktade sträcka i $\mathbf{v}$ som har sin fotpunkt i $\overrightarrow{AB}$:s spets (d.v.s. i B). Med *summan* $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ menar vi den vektor som innehåller den riktade sträckan $\overrightarrow{AC}$.

Addition av vektorer

Definition (Summa av vektorer)

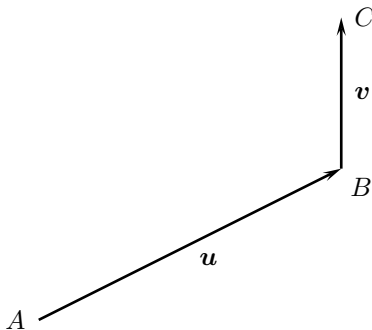
Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara två vektorer. Låt $\overrightarrow{AB}$ vara en riktad sträcka i $\mathbf{u}$ och låt $\overrightarrow{BC}$ vara den riktade sträcka i $\mathbf{v}$ som har sin fotpunkt i $\overrightarrow{AB}$:s spets (d.v.s. i B). Med *summan* $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ menar vi den vektor som innehåller den riktade sträckan $\overrightarrow{AC}$.



Addition av vektorer

Definition (Summa av vektorer)

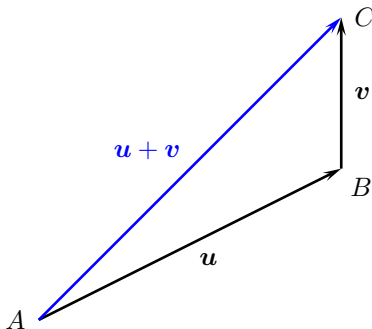
Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara två vektorer. Låt $\overrightarrow{AB}$ vara en riktad sträcka i $\mathbf{u}$ och låt $\overrightarrow{BC}$ vara den riktade sträcka i $\mathbf{v}$ som har sin fotpunkt i $\overrightarrow{AB}$:s spets (d.v.s. i B). Med *summan* $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ menar vi den vektor som innehåller den riktade sträckan $\overrightarrow{AC}$.



Addition av vektorer

Definition (Summa av vektorer)

Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara två vektorer. Låt $\overrightarrow{AB}$ vara en riktad sträcka i $\mathbf{u}$ och låt $\overrightarrow{BC}$ vara den riktade sträcka i $\mathbf{v}$ som har sin fotpunkt i $\overrightarrow{AB}$:s spets (d.v.s. i B). Med *summan* $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ menar vi den vektor som innehåller den riktade sträckan $\overrightarrow{AC}$.



Multiplikation av vektor med skalär

Förutom att addera vektorer, kan vi även multiplicera en vektor $\mathbf{u}$ med ett reellt tal s . I informella ordalag får vi då en ny vektor, vars längd (jämförd med $\mathbf{u}$) har ändrats med en faktor som bestäms av storleken på talet s . Om $s > 0$ har vektorn samma riktning som $\mathbf{u}$, medan den har rakt motsatt riktning om $s < 0$.

Multiplikation av vektor med skalär

Förutom att addera vektorer, kan vi även multiplicera en vektor $\mathbf{u}$ med ett reellt tal s . I informella ordalag får vi då en ny vektor, vars längd (jämförd med $\mathbf{u}$) har ändrats med en faktor som bestäms av storleken på talet s . Om $s > 0$ har vektorn samma riktning som $\mathbf{u}$, medan den har rakt motsatt riktning om $s < 0$.

Innan vi skriver upp den formella definitionen, behöver vi klargöra begreppet *absolutbelopp* av ett tal, eftersom det kanske inte är bekant sedan tidigare.

Multiplikation av vektor med skalär

Förutom att addera vektorer, kan vi även multiplicera en vektor $\mathbf{u}$ med ett reellt tal s . I informella ordalag får vi då en ny vektor, vars längd (jämförd med $\mathbf{u}$) har ändrats med en faktor som bestäms av storleken på talet s . Om $s > 0$ har vektorn samma riktning som $\mathbf{u}$, medan den har rakt motsatt riktning om $s < 0$.

Innan vi skriver upp den formella definitionen, behöver vi klargöra begreppet *absolutbelopp* av ett tal, eftersom det kanske inte är bekant sedan tidigare.

Absolutbeloppet av ett reellt tal s betecknas $|s|$ och definieras som

$$|s| = \begin{cases} s & \text{om } s \geq 0 \\ -s & \text{om } s < 0. \end{cases}$$

Multiplikation av vektor med skalär

Förutom att addera vektorer, kan vi även multiplicera en vektor $\mathbf{u}$ med ett reellt tal s . I informella ordalag får vi då en ny vektor, vars längd (jämförd med $\mathbf{u}$) har ändrats med en faktor som bestäms av storleken på talet s . Om $s > 0$ har vektorn samma riktning som $\mathbf{u}$, medan den har rakt motsatt riktning om $s < 0$.

Innan vi skriver upp den formella definitionen, behöver vi klargöra begreppet *absolutbelopp* av ett tal, eftersom det kanske inte är bekant sedan tidigare.

Absolutbeloppet av ett reellt tal s betecknas $|s|$ och definieras som

$$|s| = \begin{cases} s & \text{om } s \geq 0 \\ -s & \text{om } s < 0. \end{cases}$$

Exempel

I och med att $4 \geq 0$ så är $|4| = 4$. Eftersom $-3 < 0$, så är $|-3| = -(-3) = 3$.

Multiplikation av vektor med skalär

Förutom att addera vektorer, kan vi även multiplicera en vektor $\mathbf{u}$ med ett reellt tal s . I informella ordalag får vi då en ny vektor, vars längd (jämförd med $\mathbf{u}$) har ändrats med en faktor som bestäms av storleken på talet s . Om $s > 0$ har vektorn samma riktning som $\mathbf{u}$, medan den har rakt motsatt riktning om $s < 0$.

Innan vi skriver upp den formella definitionen, behöver vi klargöra begreppet *absolutbelopp* av ett tal, eftersom det kanske inte är bekant sedan tidigare.

Absolutbeloppet av ett reellt tal s betecknas $|s|$ och definieras som

$$|s| = \begin{cases} s & \text{om } s \geq 0 \\ -s & \text{om } s < 0. \end{cases}$$

Exempel

I och med att $4 \geq 0$ så är $|4| = 4$. Eftersom $-3 < 0$, så är $|-3| = -(-3) = 3$.

Vi kan tolka $|s|$ geometriskt som avståndet mellan s och 0 på den reella tallinjen.

Definition (Multiplikation av vektor med skalär)

Låt s vara ett reellt tal och låt $\mathbf{u}$ vara en vektor. Om $s \neq 0$, så menar vi med $s\mathbf{u}$ den vektor av längd $|s||\mathbf{u}|$ som

- har samma riktning som $\mathbf{u}$ om $s > 0$
- har rakt motsatt riktning som $\mathbf{u}$ om $s < 0$.

Definition (Multiplikation av vektor med skalär)

Låt s vara ett reellt tal och låt $\mathbf{u}$ vara en vektor. Om $s \neq 0$, så menar vi med $s\mathbf{u}$ den vektor av längd $|s||\mathbf{u}|$ som

- har samma riktning som $\mathbf{u}$ om $s > 0$
- har rakt motsatt riktning som $\mathbf{u}$ om $s < 0$.

Om $s = 0$, så definieras $s\mathbf{u}$ som nollvektorn $\mathbf{0}$.

Definition (Multiplikation av vektor med skalär)

Låt s vara ett reellt tal och låt $\mathbf{u}$ vara en vektor. Om $s \neq 0$, så menar vi med $s\mathbf{u}$ den vektor av längd $|s||\mathbf{u}|$ som

- har samma riktning som $\mathbf{u}$ om $s > 0$
- har rakt motsatt riktning som $\mathbf{u}$ om $s < 0$.

Om $s = 0$, så definieras $s\mathbf{u}$ som nollvektorn $\mathbf{0}$.

Exempel



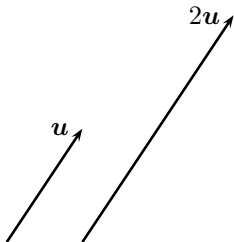
Definition (Multiplikation av vektor med skalär)

Låt s vara ett reellt tal och låt $\mathbf{u}$ vara en vektor. Om $s \neq 0$, så menar vi med $s\mathbf{u}$ den vektor av längd $|s||\mathbf{u}|$ som

- har samma riktning som $\mathbf{u}$ om $s > 0$
- har rakt motsatt riktning som $\mathbf{u}$ om $s < 0$.

Om $s = 0$, så definieras $s\mathbf{u}$ som nollvektorn $\mathbf{0}$.

Exempel



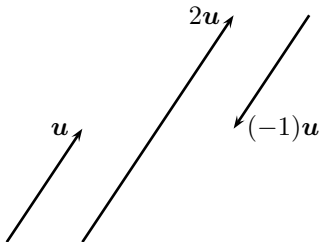
Definition (Multiplikation av vektor med skalär)

Låt s vara ett reellt tal och låt $\mathbf{u}$ vara en vektor. Om $s \neq 0$, så menar vi med $s\mathbf{u}$ den vektor av längd $|s||\mathbf{u}|$ som

- har samma riktning som $\mathbf{u}$ om $s > 0$
- har rakt motsatt riktning som $\mathbf{u}$ om $s < 0$.

Om $s = 0$, så definieras $s\mathbf{u}$ som nollvektorn $\mathbf{0}$.

Exempel



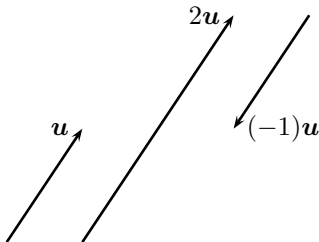
Definition (Multiplikation av vektor med skalär)

Låt s vara ett reellt tal och låt $\mathbf{u}$ vara en vektor. Om $s \neq 0$, så menar vi med $s\mathbf{u}$ den vektor av längd $|s||\mathbf{u}|$ som

- har samma riktning som $\mathbf{u}$ om $s > 0$
- har rakt motsatt riktning som $\mathbf{u}$ om $s < 0$.

Om $s = 0$, så definieras $s\mathbf{u}$ som nollvektorn $\mathbf{0}$.

Exempel



Vi ser att $(-1)\mathbf{u}$ är lika lång som $\mathbf{u}$ men har motsatt riktning. Vi kommer i fortsättningen att beteckna denna vektor med $-\mathbf{u}$.

Definition (Parallella vektorer)

Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara två vektorer. Om det finns ett reellt tal s sådant att

$$\mathbf{u} = s\mathbf{v},$$

så säges $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara *parallella*.

Definition (Parallella vektorer)

Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara två vektorer. Om det finns ett reellt tal s sådant att

$$\mathbf{u} = s\mathbf{v},$$

så säges $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara *parallella*.

För att två vektorer ska vara parallella måste de alltså antingen ha samma riktning eller helt motsatta riktningar. De kan dock vara olika långa.

Definition (Parallella vektorer)

Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara två vektorer. Om det finns ett reellt tal s sådant att

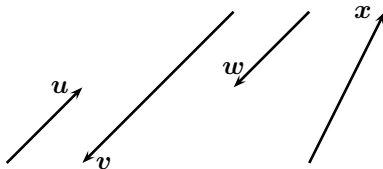
$$\mathbf{u} = s\mathbf{v},$$

så säges $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara *parallella*.

För att två vektorer ska vara parallella måste de alltså antingen ha samma riktning eller helt motsatta riktningar. De kan dock vara olika långa.

Exempel

Vektorerna $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ nedan är sinsemellan parallella. Vektorn $\mathbf{x}$ är inte parallell med någon av de andra vektorerna.



Definition (Parallella vektorer)

Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara två vektorer. Om det finns ett reellt tal s sådant att

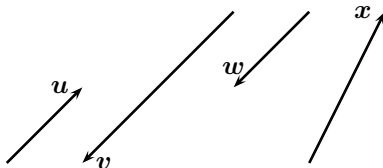
$$\mathbf{u} = s\mathbf{v},$$

så säges $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara *parallella*.

För att två vektorer ska vara parallella måste de alltså antingen ha samma riktning eller helt motsatta riktningar. De kan dock vara olika långa.

Exempel

Vektorerna $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ nedan är sinsemellan parallella. Vektorn $\mathbf{x}$ är inte parallell med någon av de andra vektorerna.



Observera att med ovanstående definition så får nollvektorn $\mathbf{0}$ en särställning. Vilka vektorer är nollvektorn parallell med?

Några räknelagar för vektorer

Sats (Räkneregler för vektorer)

Låt $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ vara vektorer, samt s och t reella tal. Då gäller

(i) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

(ii) $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$

(iii) $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$

(iv) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$ om och endast om $\mathbf{v} = -\mathbf{u}$.

(v) $s(t\mathbf{u}) = (st)\mathbf{u}$

(vi) $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$

(vii) $s(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = s\mathbf{u} + s\mathbf{v}$

(viii) $(s + t)\mathbf{u} = s\mathbf{u} + t\mathbf{u}$

Några räknelagar för vektorer

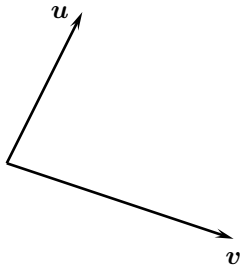
Sats (Räkneregler för vektorer)

Låt $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ vara vektorer, samt s och t reella tal. Då gäller

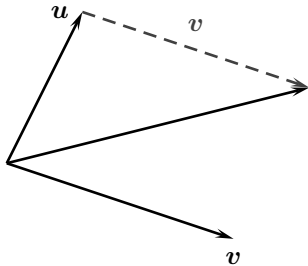
- (i) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
- (ii) $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
- (iii) $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$
- (iv) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$ om och endast om $\mathbf{v} = -\mathbf{u}$.
- (v) $s(t\mathbf{u}) = (st)\mathbf{u}$
- (vi) $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$
- (vii) $s(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = s\mathbf{u} + s\mathbf{v}$
- (viii) $(s + t)\mathbf{u} = s\mathbf{u} + t\mathbf{u}$

Med hänvisning till räknelag (iv) ovan, kan vi förutom addition även införa *subtraktion* av vektorer. Om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är vektorer, så definieras *differensen* $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ som summan av vektorerna $\mathbf{u}$ och $-\mathbf{v}$, d.v.s.
 $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$.

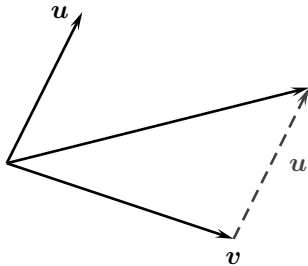
Bevis för räknelagen $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$:



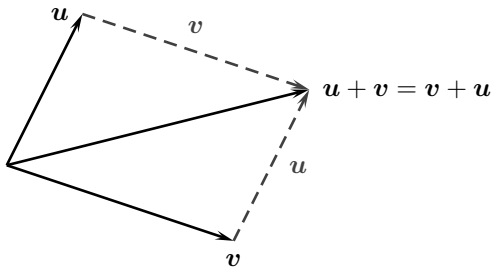
Bevis för räknelagen $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$:



Bevis för räknelagen $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$:



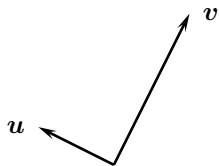
Bevis för räknelagen $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$:



Vektorerna $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ och $\mathbf{v} + \mathbf{u}$ innebär samma förflyttning (närmare bestämt längs med diagonalen i den parallelogram som spänns upp av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$).

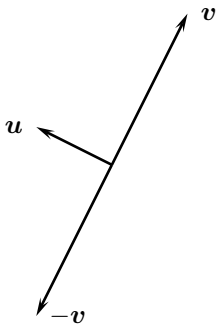
Exempel

Rita $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ i figuren nedan.



Exempel

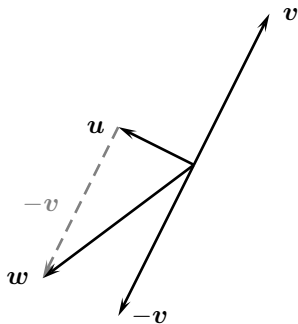
Rita $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ i figuren nedan.



- Eftersom $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$, ritar vi först ut $-\mathbf{v}$.

Exempel

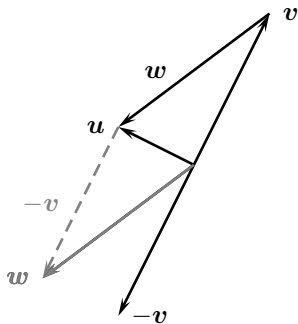
Rita $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ i figuren nedan.



- Eftersom $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$, ritar vi först ut $-\mathbf{v}$.
- Därefter ritar vi ut $\mathbf{w} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$.

Exempel

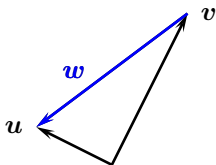
Rita $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ i figuren nedan.



- Eftersom $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$, ritar vi först ut $-\mathbf{v}$.
- Därefter ritar vi ut $\mathbf{w} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$.
- Men vektorer kan ju parallellförflyttas, så $\mathbf{w}$ kan lika gärna ritas från spetsen av $\mathbf{v}$ till spetsen av $\mathbf{u}$.

Exempel

Rita $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ i figuren nedan.

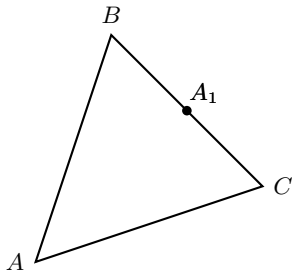


- Eftersom $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$, ritar vi först ut $-\mathbf{v}$.
- Därefter ritar vi ut $\mathbf{w} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$.
- Men vektorer kan ju parallellförflyttas, så $\mathbf{w}$ kan lika gärna ritas från spetsen av $\mathbf{v}$ till spetsen av $\mathbf{u}$.

Vi kan se $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ som den vektor $\mathbf{w}$ som uppfyller $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{u}$.

Exempel (Mittpunktsformeln)

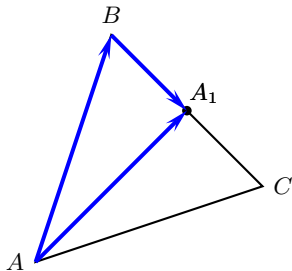
Låt ABC vara en triangel och A_1 mittpunkten på sidan BC .



Exempel (Mittpunktsformeln)

Låt ABC vara en triangel och A_1 mittpunkten på sidan BC . Genom att betrakta sidorna i triangeln som vektorer, så får vi

$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

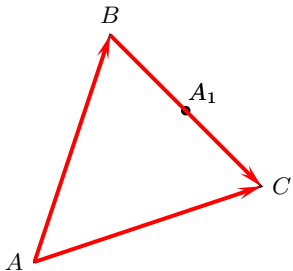


Exempel (Mittpunktsformeln)

Låt ABC vara en triangel och A_1 mittpunkten på sidan BC . Genom att betrakta sidorna i triangeln som vektorer, så får vi

$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

På samma gång är $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ (jämför med föregående exempel),



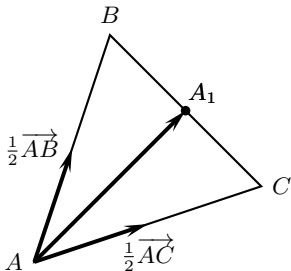
Exempel (Mittpunktsformeln)

Låt ABC vara en triangel och A_1 mittpunkten på sidan BC . Genom att betrakta sidorna i triangeln som vektorer, så får vi

$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

På samma gång är $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ (jämför med föregående exempel), vilket ger

$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$



Exempel (Mittpunktsformeln)

Låt ABC vara en triangel och A_1 mittpunkten på sidan BC . Genom att betrakta sidorna i triangeln som vektorer, så får vi

$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

På samma gång är $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ (jämför med föregående exempel), vilket ger

$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

Formeln $\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ brukar kallas för *mittpunktsformeln*.

Exempel

Med föregående exempel i bagaget kan vi ge ett bevis för följande sats, hämtad från geometrin, med hjälp av vektorer:

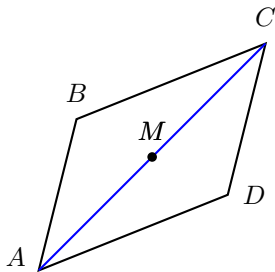
Diagonalerna i en parallellogram skär varandra mitt itu.

Exempel

Med föregående exempel i bagaget kan vi ge ett bevis för följande sats, hämtad från geometrin, med hjälp av vektorer:

Diagonalerna i en parallellogram skär varandra mitt itu.

Låt $ABCD$ vara en parallellogram, och låt M vara mittpunkten på den ena diagonalen AC . Vi ska visa att M också är mittpunkt på diagonalen BD .



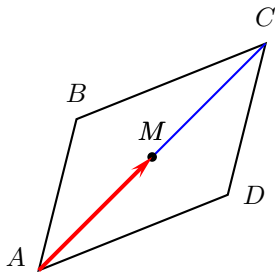
Exempel

Med föregående exempel i bagaget kan vi ge ett bevis för följande sats, hämtad från geometrin, med hjälp av vektorer:

Diagonalerna i en parallelogram skär varandra mitt itu.

Låt $ABCD$ vara en parallelogram, och låt M vara mittpunkten på den ena diagonalen AC . Vi ska visa att M också är mittpunkt på diagonalen BD . Eftersom M är mittpunkt på sträckan AC , så är

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$



Exempel

Med föregående exempel i bagaget kan vi ge ett bevis för följande sats, hämtad från geometrin, med hjälp av vektorer:

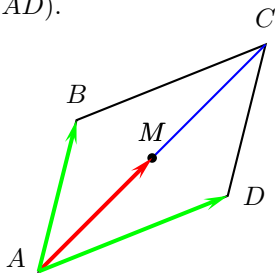
Diagonalerna i en parallelogram skär varandra mitt itu.

Låt $ABCD$ vara en parallelogram, och låt M vara mittpunkten på den ena diagonalen AC . Vi ska visa att M också är mittpunkt på diagonalen BD . Eftersom M är mittpunkt på sträckan AC , så är

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

Men å andra sidan är $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, vilket ger

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}).$$



Exempel

Med föregående exempel i bagaget kan vi ge ett bevis för följande sats, hämtad från geometrin, med hjälp av vektorer:

Diagonalerna i en parallelogram skär varandra mitt itu.

Låt $ABCD$ vara en parallelogram, och låt M vara mittpunkten på den ena diagonalen AC . Vi ska visa att M också är mittpunkt på diagonalen BD . Eftersom M är mittpunkt på sträckan AC , så är

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

Men å andra sidan är $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, vilket ger

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}).$$

Från mittpunktsformeln känner vi igen detta som att M är mittpunkten på sidan BD i triangeln ABD . Alltså delas BD mitt itu av M , vilket vi ville bevisa.

