

Vektorgeometri för gymnasister

Per-Anders Svensson

<http://homepage.lnu.se/staff/psvmsi/vektorgeometri/gymnasiet.html>

Fakulteten för teknik
Linnéuniversitetet

Matriser II

Innehåll

Matriser - Kort repetition

Transponering av matriser

Matrisinvers

Matriser - Kort repetition

Definition (Matris)

En *matris* A med p *rader* och q *kolonner* är ett rektangulärt talschema med följande utseende:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix}.$$

Talen i själva schemat kallas matrisens *element*. Elementet på rad i och kolonn j betecknas a_{ij} . Om en matris har p rader och q kolonner, så säger vi att den är av *typen* $p \times q$, eller att den är en $p \times q$ -*matris*. Om $p = 1$ har vi att göra med en *radmatris*, och om $q = 1$ med en *kolonnmatris*. Om $p = q = n$ så är matrisen *kvadratisk* av *ordning* n . En *diagonalmatris* är en kvadratisk matris, där det för matriselementen a_{ij} gäller att $a_{ij} = 0$ om $i \neq j$, d.v.s. samtliga element utanför den s.k. *huvuddiagonalen* (på vilken elementen a_{ii} ligger) är noll.

Definition (Nollmatrix, Enhetsmatrix)

En matris vars samtliga element är nollor kallas för en *nollmatrix*. En *enhetsmatrix* är en diagonalmatris med bara ettor i huvuddiagonalen ($a_{ii} = 1$ för alla i):

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Definition (Summa av matriser)

Låt $A = (a_{ij})_{p \times q}$ och $B = (b_{ij})_{p \times q}$ vara två $p \times q$ -matriser. *Summan $A + B$ av A och B* definieras som matrisen $C = (c_{ij})_{p \times q}$, där

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

När man adderar två matriser, gör detta man elementvis.

Definition (Multiplikation av matris med skalär (tal))

Låt $A = (a_{ij})_{p \times q}$ och låt t vara ett reellt tal. Vi definierar *produkten av t och A* som matrisen $tA = (ta_{ij})_{p \times q}$.

En matris multipliceras med ett tal, genom att multiplicera varje element i matrisen med detta tal.

Definition (Matrisprodukt)

Låt $A = (a_{ij})_{p \times n}$ och $B = (b_{ij})_{n \times q}$. Vi definierar *produkten AB* som den matris $C = (c_{ij})_{p \times q}$, där

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

För att kunna beräkna AB måste A ha lika många kolonner som B har rader. I så fall kommer AB att bli en matris med lika många rader som A och lika många kolonner som B .

Elementet c_{ij} i produkten $C = AB$ fås genom att multiplicera varje element på i :te raden i A med motsvarande element i j :te kolonnen i B , och sedan summera alla dessa produkter.

Sats (Räkneregler för matrISRäkning)

Låt A , B och C vara $n \times n$ -matriser och låt s och t vara reella tal. Låt vidare O och E vara en nollmatris respektive enhetsmatris av typ $n \times n$. Då gäller

- $(s + t)A = sA + tA$
- $s(tA) = (st)A$
- $A + (B + C) = (A + B) + C$
- $A + B = B + A$
- $A + O = A$
- $A + (-A) = O$, där $-A = (-1)A$
- $AE = EA = A$
- $A(BC) = (AB)C$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(B + C)A = BA + CA$.

Observera att multiplikation av matriser inte är kommutativ; i allmänhet är $AB \neq BA$.

Transponering av matriser

Förutom att addera och multiplicera matriser, kommer vi ibland ha nytta av att kunna *transponera* en matris.

Definition (Matristransponering)

Låt $A = (a_{ij})_{p \times q}$. Matrisen $(a_{ji})_{q \times p}$ kallas då *transponatet till A* och betecknas A^T (i boken A^t). Beteckningen A^T läses som "A-transponat".

- Vi byter plats på rader och kolonner för att få transponatet till en matris; raderna (kolonnerna) i A blir kolonnerna (raderna) i A^T .
- I litteraturen kan man hitta alternativa beteckningar för transponatet till A , som t.ex. A' , A^{tr} eller tA . De är inte så vanligt förekommande, men kan vara bra att känna till.

Exempel

Transponaten till de olika matriserna

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \\ 0 & 2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$D = (5 \quad 1 \quad 2)$$

ges av

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$D^T = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lägg speciellt märke till att B och B^T är samma matris.

Matrisen B i det förra exemplet hade egenskapen att den var lika med sitt eget transponat.

Definition

En matris A kallas *symmetrisk* om $A = A^T$.

- Det är endast kvadratiska matriser som kan vara symmetriska, ty om A inte är kvadratisk, så kan A och A^T inte vara lika; de är ju då inte ens av samma typ (om den ena är av typ $p \times q$, så är den andra av typ $q \times p$).
- I en symmetrisk matris gäller att varje element, som ligger ovanför huvuddiagonalen, har en "spegelbild" som ligger under huvuddiagonalen, och vice versa.

Sats (Räkneregler för transponering)

Låt A , B och C vara matriser och s ett reellt tal. Då gäller

- (i) $(A + B)^T = A^T + B^T$
- (ii) $(sA)^T = sA^T$
- (iii) $(AC)^T = C^T A^T$ (OBS. ordningsföljden!)
- (iv) $(A^T)^T = A$,

förutsatt att matriserna är av sådan typ att de olika summorna och produkterna är definierade.

Matrisinvers

Förra lektionen såg vi att varje linjärt ekvationssystem

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$

med hjälp av matriser kan ges den kompakta framställningen $AX = B$, där

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$$

Matrisen A kallas för systemets *koefficientmatris*.

Ett linjärt ekvationssystem får alltså på matrisform utseendet av en ”linjär matrisekvation”

$$AX = B. \quad (1)$$

Här är A (koefficientmatrisen) och B (en kolonnmatris) kända matriser, medan matrisen X är en okänd matris; dess element utgörs av de olika variablerna i ekvationssystemet.

Det ligger nära till hands att jämföra matrisekvationen (1) med en vanlig linjär ekvation

$$ax = b,$$

där a och b är kända tal. Om $a \neq 0$ så har denna ekvation ju lösningen

$$x = \frac{b}{a},$$

som vi får genom att dividera båda leden med a .

Kan man tänka sig att något liknande är möjligt med matrisekvationen (1); kan vi ”dividera båda leden med A ”?

När vi löser ekvationen $ax = b$ genom att dividera båda leden med a (förutsatt att $a \neq 0$), så är det samma sak som att multiplicera båda leden med a^{-1} , eftersom

$$a^{-1} \cdot b = \frac{1}{a} \cdot b = \frac{b}{a}.$$

Så istället för att ”dividera” båda leden i matrisekvationen $AX = B$, med matrisen A , kan vi kanske ”multiplicera med båda leden med matrisen A^{-1} ”? Vad är i så fall A^{-1} för slags matris?

Om vi jämför med tal igen så har vi ju att $a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = 1$. Kan vi översätta detta till ”matrisspråk”? Finns det en matris som beter sig som talet 1? Ja, enhetsmatrisen E ! Den uppfyller ju $AE = EA = A$ (om A och E har samma ordning), att jämföra med räkneregeln $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ för tal. Alltså ska vi leta efter en matris A^{-1} som uppfyller $A^{-1}A = AA^{-1} = E$.

Definition (Inverterbar matris; Invers matris)

En kvadratisk matris A säges vara *inverterbar* om finns en matris C sådan att

$$AC = E \text{ och } CA = E.$$

Vi kallar då C för en *invers* till A .

Exempel

Matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

är inverterbar, och en invers till A ges av

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

ty

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) & 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E \end{aligned}$$

och på samma sätt $BA = E$.

Kan det finnas fler inverser till A ovan, förutom B ?

Sats

Antag att A är en inverterbar matris. Då har A exakt en invers.

Bevis.

Antag att såväl B som C är en invers till A . Då gäller $AB = BA = E$ och $AC = CA = E$. Vi ska visa att $B = C$. Detta följer av att

$$B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C.$$



Eftersom en inverterbar matris A bara kan ha *en* invers, kan vi tala om den i bestämd form: *inversen* till A . Vi betecknar inversen till A med A^{-1} .

Om en kvadratisk matris är koefficientmatris till ett linjärt ekvationssystem, så visar det sig att detta ekvationssystem har en entydig lösning, precis i det fall då matrisen i fråga är inverterbar. Vi formulerar detta som en sats:

Sats

Antag att ett linjärt ekvationssystem på matrisform har utseendet

$$AX = B,$$

där A är en kvadratisk matris och B en kolonnmatris. Då har detta ekvationssystem en entydig lösning, om och endast om A är inverterbar. Lösningen ges då av

$$X = A^{-1}B.$$

En metod att beräkna inversen till en matris A är att lösa ett ekvationssystem $AX = Y$ med allmänt högerled Y . Om det är lösbart, har vi att $A^{-1}Y = X$, vilket vi kan tolka som ett ekvationssystem med allmänt högerled X , i vilket A^{-1} är koefficientmatrisen.

Exempel

Vi ska beräkna inversen till

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

i den mån denna existerar, och löser därför ett ekvationssystem $AX = Y$ med allmänt högerled:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = y_1 \\ x_1 + 2x_3 = y_2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = y_3 \end{cases}$$

Vi löser detta ekvationssystem med hjälp av Gausselimination. Som det ser ut nu, måste första ekvationen multipliceras med $-1/2$, om vi med hjälp av denna vill eliminera x_1 från andra och tredje ekvationen. För att slippa brottas med bråkital i våra räkningar, multiplicerar vi först andra och tredje ekvationen med 2:

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = y_1 \\ 2x_1 \quad \quad + 4x_3 = 2y_2 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 2y_3 \end{cases} \quad \begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{l} \leftarrow -1 \\ \leftarrow -1 \end{array}} \end{array} \\
\iff & \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = y_1 \\ -x_2 + x_3 = -y_1 + 2y_2 \\ -3x_2 + x_3 = -y_1 + 2y_3 \end{cases} \quad \begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{l} \leftarrow -3 \end{array}} \end{array} \\
\iff & \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = y_1 \\ -x_2 + x_3 = -y_1 + 2y_2 \\ -2x_3 = 2y_1 - 6y_2 + 2y_3 \end{cases}
\end{aligned}$$

Innan vi fortsätter eliminera variabler i vänsterleden, dividerar vi båda leden i den sista ekvationen med -2 :

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = y_1 \\ -x_2 + x_3 = -y_1 + 2y_2 \\ x_3 = -y_1 + 3y_2 - y_3 \end{cases} \begin{array}{l} \xleftarrow{-3} \\ \xleftarrow{-1} \\ \text{---} \end{array} \\
\iff & \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4y_1 - 9y_2 + 3y_3 \\ -x_2 = -y_2 + y_3 \\ x_3 = -y_1 + 3y_2 - y_3 \end{cases} \begin{array}{l} \xleftarrow{+} \\ \text{---} \\ \end{array} \\
\iff & \begin{cases} 2x_1 = 4y_1 - 10y_2 + 4y_3 \\ -x_2 = -y_2 + y_3 \\ x_3 = -y_1 + 3y_2 - y_3 \end{cases}
\end{aligned}$$

Slutligen dividerar vi de första ekvationen med 2 och andra ekvationen med -1 :

Vi får då

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 - 5y_2 + 2y_3 \\ x_2 = y_2 - y_3 \\ x_3 = -y_1 + 3y_2 - y_3. \end{cases}$$

Koefficientmatrisen i högerledet är den sökta inversen till A :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Det skadar aldrig att kontrollera att man räknat rätt, genom att beräkna AA^{-1} eller $A^{-1}A$, för att se om svaret blir E . Utför denna kontroll för exemplet ovan!

När vi nu väl känner till A^{-1} kan vi lösa ekvationssystemet $AX = B$ för vilket högerled B som helst! Till exempel fås lösningen till

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases} \quad (2)$$

(där koefficientmatrisen är just matrisen A ovan) genom att beräkna $A^{-1}B$, där

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Vi får

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -5 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Med andra ord så har (2) lösningen

$$\begin{cases} x_1 = 15 \\ x_2 = -5 \\ x_3 = -8. \end{cases}$$

Exempel

I ett exempel från den första föreläsningen konstaterade vi att ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$$

hade oändligt många lösningar (och om 7 byttes mot 4 i den tredje ekvationens högerled, så blev det inga lösningar alls till systemet). Att vi inte har entydig lösning här, beror på att koefficientmatrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

inte är inverterbar. Detta kommer vi upptäcka om vi försöker beräkna A^{-1} , genom att lösa $AX = Y$ med allmänt högerled Y :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = y_1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = y_2 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = y_3 \end{cases} \quad \begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{l} \leftarrow -2 \\ \leftarrow -4 \end{array}} \end{array}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = y_1 \\ -x_2 + 3x_3 = -2y_1 + y_2 \\ -x_2 + 3x_3 = -4y_1 + y_3 \end{cases} \quad \begin{array}{c} \boxed{\leftarrow -1} \end{array}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = y_1 \\ -x_2 + 3x_3 = -2y_1 + y_2 \\ 0 = -2y_1 - y_2 + y_3 \end{cases}$$

Vi får ett system utan variabler i vänsterledet till den tredje ekvationen. Det kan därför inte finnas en entydig lösning; det blir antingen ingen alls eller oändligt många, beroende på vilka värden som y_1 , y_2 och y_3 har. För att det överhuvudtaget ska kunna finnas en lösning, måste $-2y_1 - y_2 + y_3 = 0$ gälla (och i så fall finns det i själva verket oändligt många lösningar). I exemplen från den första föreläsningen hade vi endera $(y_1, y_2, y_3) = (2, 3, 7)$ eller $(y_1, y_2, y_3) = (2, 3, 4)$. Vi ser att $-2y_1 - y_2 + y_3 = 0$ är uppfyllt i det förstnämnda fallet.

Några räknelagar för räkning med matrisinverser presenteras i nedanstående sats.

Sats

Låt A och B vara två inverterbara matriser av samma typ och låt $s \neq 0$ vara ett reellt tal. Då är matriserna A^{-1} , A^T , sA och AB också inverterbara, och

$$(i) \quad (A^{-1})^{-1} = A$$

$$(ii) \quad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

$$(iii) \quad (sA)^{-1} = \frac{1}{s} A^{-1}$$

$$(iv) \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \text{ (OBS: Ordningsföljden!)}$$

Bevis av (iv).

Eftersom

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$$

och med liknande räkningar $(B^{-1}A^{-1})(AB) = E$, så är $B^{-1}A^{-1}$ en invers till AB . Eftersom en inverterbar matris bara kan ha en invers, måste alltså $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. □

Vi rundar av med ett exempel som kan ses som en varning att det inte bara är att räkna på "som vanligt" när det gäller algebra med matriser.

Exempel

Givet de tre matriserna

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

lös matrisekvationen

$$AX = AB + CA.$$

Lösning.

Här känns det frestande att bryta ut A i högerledet och sedan förkorta:

$$AX = AB + CA \implies AX = A(B + C) \implies X = B + C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Denna lösning är dock *felaktig!* (Varför?)

Istället resonerar vi på följande vis: Om A vore inverterbar, så kan vi multiplicera båda leden i ekvationen $AX = AB + CA$ från vänster med A^{-1} . Vi får då

$$\begin{aligned}A^{-1}AX &= A^{-1}(AB + CA) \\ \implies EX &= A^{-1}AB + A^{-1}CA \\ \implies X &= B + A^{-1}CA.\end{aligned}$$

Nu visar det sig att A faktiskt *är* inverterbar, och att

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Visa detta som en övning! Efter litet räkningar (fyll i detaljerna på egen hand) får vi att

$$X = B + A^{-1}CA = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -8 & 25 \\ -1 & 23 \end{pmatrix}.$$

Felet vi gör oss skyldiga till i det första lösningsförslaget är att räkna som om CA och AC vore samma matris, vilket de inte är! Man måste i allmänhet också vara försiktig med att förkorta: Även om $AB = AC$ så är det *inte alls* säkert att $B = C$ (såvida inte A är inverterbar).