

Vektorgeometri för gymnasister

Per-Anders Svensson

<http://homepage.lnu.se/staff/psvmsi/vektorgeometri/gymnasiet.html>

Fakulteten för teknik
Linnéuniversitetet

Linjära ekvationssystem

Innehåll

Linjära ekvationssystem

Gausselimination

Om antalet lösningar till ett linjärt ekvationssystem

Under- och överbestämda ekvationssystem

Homogena och inhomogena ekvationssystem

Linjära ekvationssystem

Definition (Linjär ekvation)

Låt $a_1, a_2, \dots, a_n$ och b vara kända tal. En *linjär ekvation med n obekanta (eller variabler)* $x_1, x_2, \dots, x_n$ kan skrivas

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b.$$

Talen $a_1, a_2, \dots, a_n$ kallas för respektive variabels *koefficient*.

Linjära ekvationssystem

Definition (Linjär ekvation)

Låt $a_1, a_2, \dots, a_n$ och b vara kända tal. En *linjär ekvation med n obekanta (eller variabler)* $x_1, x_2, \dots, x_n$ kan skrivas

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b.$$

Talen $a_1, a_2, \dots, a_n$ kallas för respektive variabels *koefficient*.

Exempel

- Ekvationen $3x_1 + x_2 - 5x_3 = 12$ är en linjär ekvation med tre variabler (eller obekanta) x_1, x_2 och x_3 . Koefficienterna för dessa variabler är i tur och ordning 3, 1 och -5 .

Linjära ekvationssystem

Definition (Linjär ekvation)

Låt $a_1, a_2, \dots, a_n$ och b vara kända tal. En *linjär ekvation med n obekanta (eller variabler)* $x_1, x_2, \dots, x_n$ kan skrivas

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b.$$

Talen $a_1, a_2, \dots, a_n$ kallas för respektive variabels *koefficient*.

Exempel

- Ekvationen $3x_1 + x_2 - 5x_3 = 12$ är en linjär ekvation med tre variabler (eller obekanta) x_1, x_2 och x_3 . Koefficienterna för dessa variabler är i tur och ordning 3, 1 och -5 .
- Ekvationen $7x_1 + 2x_2x_3 = 4$ har också tre variabler, men den är inte linjär, på grund av termen $2x_2x_3$.

Linjära ekvationssystem

Definition (Linjär ekvation)

Låt $a_1, a_2, \dots, a_n$ och b vara kända tal. En *linjär ekvation med n obekanta (eller variabler)* $x_1, x_2, \dots, x_n$ kan skrivas

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b.$$

Talen $a_1, a_2, \dots, a_n$ kallas för respektive variabels *koefficient*.

Exempel

- Ekvationen $3x_1 + x_2 - 5x_3 = 12$ är en linjär ekvation med tre variabler (eller obekanta) x_1, x_2 och x_3 . Koefficienterna för dessa variabler är i tur och ordning 3, 1 och -5 .
- Ekvationen $7x_1 + 2x_2x_3 = 4$ har också tre variabler, men den är inte linjär, på grund av termen $2x_2x_3$.
- Ekvationen $x_1 + 3x_2 - x_3 + \sqrt{x_4} = 0$ är inte heller linjär, på grund av termen $\sqrt{x_4}$.

Definition (Lösning till linjär ekvation)

Med en *lösning* till en linjär ekvation

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

avses en uppsättning av värden på variablerna $x_1, x_2, \dots, x_n$ som uppfyller ekvationen.

Definition (Lösning till linjär ekvation)

Med en *lösning* till en linjär ekvation

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

avses en uppsättning av värden på variablerna $x_1, x_2, \dots, x_n$ som uppfyller ekvationen.

Exempel

Ekvationen

$$3x + y = 6 \tag{1}$$

är en linjär ekvation i två variabler x och y . En lösning till denna ekvation ges av $x = 1$, $y = 3$.

Definition (Lösning till linjär ekvation)

Med en *lösning* till en linjär ekvation

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

avses en uppsättning av värden på variablerna $x_1, x_2, \dots, x_n$ som uppfyller ekvationen.

Exempel

Ekvationen

$$3x + y = 6 \tag{1}$$

är en linjär ekvation i två variabler x och y . En lösning till denna ekvation ges av $x = 1$, $y = 3$. En annan lösning är $x = 0$, $y = 6$.

Definition (Lösning till linjär ekvation)

Med en *lösning* till en linjär ekvation

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

avses en uppsättning av värden på variablerna $x_1, x_2, \dots, x_n$ som uppfyller ekvationen.

Exempel

Ekvationen

$$3x + y = 6 \tag{1}$$

är en linjär ekvation i två variabler x och y . En lösning till denna ekvation ges av $x = 1$, $y = 3$. En annan lösning är $x = 0$, $y = 6$. Finns det fler lösningar?

Definition (Lösning till linjär ekvation)

Med en *lösning* till en linjär ekvation

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

avses en uppsättning av värden på variablerna $x_1, x_2, \dots, x_n$ som uppfyller ekvationen.

Exempel

Ekvationen

$$3x + y = 6 \tag{1}$$

är en linjär ekvation i två variabler x och y . En lösning till denna ekvation ges av $x = 1$, $y = 3$. En annan lösning är $x = 0$, $y = 6$. Finns det fler lösningar? Hur många finns det?

Definition (Lösning till linjär ekvation)

Med en *lösning* till en linjär ekvation

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

avses en uppsättning av värden på variablerna $x_1, x_2, \dots, x_n$ som uppfyller ekvationen.

Exempel

Ekvationen

$$3x + y = 6 \tag{1}$$

är en linjär ekvation i två variabler x och y . En lösning till denna ekvation ges av $x = 1$, $y = 3$. En annan lösning är $x = 0$, $y = 6$. Finns det fler lösningar? Hur många finns det?

Om vi i (1) löser ut y , får vi

$$y = -3x + 6,$$

vilket vi kan tolka som ekvationen för en rät linje. Varje punkt på denna linje svarar mot en lösning till (1) och tvärtom. Det finns alltså oändligt många lösningar!

Definition (Linjärt ekvationssystem)

Ett *linjärt ekvationssystem* med n obekanta och p ekvationer kan skrivas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pn}x_n = b_p. \end{cases}$$

Koefficienten a_{ij} finns framför variabeln x_j i ekvation nummer i . En *lösning* till ekvationssystemet är en uppsättning av värden på variablerna $x_1, x_2, \dots, x_n$ som uppfyller alla ekvationerna *samtidigt*.

Exempel

Ekvationssystemet

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$$

har lösningen

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0. \end{cases}$$

Finns det fler lösningar?

Exempel

Ekvationssystemet

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$$

har lösningen

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0. \end{cases}$$

Finns det fler lösningar?

Nej, ty om man löser ut y ur båda ekvationerna, får man $y = x - 1$ respektive $y = 3x - 3$. Dessa två räta linjer har en enda gemensam skärningspunkt $(1, 0)$ (rita i ett koordinatsystem!), så $x = 1$, $y = 0$ är den enda *gemensamma* lösningen till de båda ekvationerna i systemet.

Exempel

Ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$$

saknar lösning.

Exempel

Ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$$

saknar lösning.

Löser man ut y ur båda ekvationerna får man $y = -x + 2$ respektive $y = -x + 3$. Dessa två linjer är parallella (samma riktningskoefficient; $k = -1$); det saknas skärningspunkter och därmed lösningar till ekvationssystemet. (Rita!)

Exempel

Ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$$

saknar lösning.

Löser man ut y ur båda ekvationerna får man $y = -x + 2$ respektive $y = -x + 3$. Dessa två linjer är parallella (samma riktningskoefficient; $k = -1$); det saknas skärningspunkter och därmed lösningar till ekvationssystemet. (Rita!)

Exempel

Hur många lösningar har ekvationssystemet

$$\begin{cases} 4x - 2y = 4 \\ -2x + y = -2? \end{cases}$$

Exempel

Ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$$

saknar lösning.

Löser man ut y ur båda ekvationerna får man $y = -x + 2$ respektive $y = -x + 3$. Dessa två linjer är parallella (samma riktningskoefficient; $k = -1$); det saknas skärningspunkter och därmed lösningar till ekvationssystemet. (Rita!)

Exempel

Hur många lösningar har ekvationssystemet

$$\begin{cases} 4x - 2y = 4 \\ -2x + y = -2? \end{cases}$$

Båda ekvationerna svarar mot den räta linjen $y = 2x - 2$. Samtliga punkter på denna linje svarar mot en lösning av ekvationssystemet; det finns alltså oändligt många lösningar.

Gausselimination

Två ekvationssystem som har samma lösningar säges vara *ekvivalenta*.
Ekvivalenta ekvationssystem kan dock se väldigt olika ut.

Gausselimination

Två ekvationssystem som har samma lösningar säges vara *ekvivalenta*. Ekvivalenta ekvationssystem kan dock se väldigt olika ut.

Givet ett ekvationssystem, så får man ett till detta ekvivalent system, om man

Gausselimination

Två ekvationssystem som har samma lösningar säges vara *ekvivalenta*. Ekvivalenta ekvationssystem kan dock se väldigt olika ut.

Givet ett ekvationssystem, så får man ett till detta ekvivalent system, om man

- ändrar ordningsföljden på ekvationerna i systemet

Gausselimination

Två ekvationssystem som har samma lösningar säges vara *ekvivalenta*. Ekvivalenta ekvationssystem kan dock se väldigt olika ut.

Givet ett ekvationssystem, så får man ett till detta ekvivalent system, om man

- ändrar ordningsföljden på ekvationerna i systemet
- multiplicerar någon av ekvationerna med ett tal som ej är 0

Gausselimination

Två ekvationssystem som har samma lösningar säges vara *ekvivalenta*. Ekvivalenta ekvationssystem kan dock se väldigt olika ut.

Givet ett ekvationssystem, så får man ett till detta ekvivalent system, om man

- ändrar ordningsföljden på ekvationerna i systemet
- multiplicerar någon av ekvationerna med ett tal som ej är 0
- till en ekvation adderar en (multipel av en) annan ekvation.

Gausselimination

Två ekvationssystem som har samma lösningar säges vara *ekvivalenta*. Ekvivalenta ekvationssystem kan dock se väldigt olika ut.

Givet ett ekvationssystem, så får man ett till detta ekvivalent system, om man

- ändrar ordningsföljden på ekvationerna i systemet
- multiplicerar någon av ekvationerna med ett tal som ej är 0
- till en ekvation adderar en (multipel av en) annan ekvation.

Man kan lösa ett ekvationssystem genom att successivt bilda andra ekvivalenta ekvationssystem, som är alltmer "lättare" att lösa.

Gausselimination, även kallat *successiv elimination*, är en generell metod för att genomföra detta.

Exempel

Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$$

Exempel

Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$$

Med hjälp av Gausselimination får vi

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \end{cases} \begin{array}{l} \square \\ \leftarrow_{-1} \\ \end{array}$$

Exempel

Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$$

Med hjälp av Gausselimination får vi

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \end{cases} \begin{array}{l} \xrightarrow{-1} \\ \xrightarrow{-2} \end{array} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_2 - x_3 = 1 \\ -x_2 - 3x_3 = -1 \end{cases}$$

Exempel

Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$$

Med hjälp av Gausselimination får vi

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \end{cases} \begin{array}{l} \xrightarrow{-1} \\ \xrightarrow{-2} \end{array} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_2 - x_3 = 1 \\ -x_2 - 3x_3 = -1 \end{cases} \begin{array}{l} \xrightarrow{+} \end{array}$$

Exempel

Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$$

Med hjälp av Gausselimination får vi

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \end{cases} &\xrightarrow{\substack{\text{R}_2 \leftarrow \text{R}_2 - \text{R}_1 \\ \text{R}_3 \leftarrow \text{R}_3 - 2\text{R}_1}} \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_2 - x_3 = 1 \\ -x_2 - 3x_3 = -1 \end{cases} \\ &\xrightarrow{\text{R}_3 \leftarrow \text{R}_3 + \text{R}_2} \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_2 - x_3 = 1 \\ -4x_3 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Exempel

Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$$

Med hjälp av Gausselimination får vi

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \end{cases} \begin{array}{l} \xrightarrow{-1} \\ \xrightarrow{-2} \end{array} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_2 - x_3 = 1 \\ -x_2 - 3x_3 = -1 \end{cases} \begin{array}{l} \xrightarrow{+} \end{array} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_2 - x_3 = 1 \\ -4x_3 = 0. \end{cases}$$

Genom att successivt eliminera ("plocka bort") variabler från andra och tredje ekvationen, har vi nu fått ett ekvationssystem som är ekvivalent med det ursprungliga, men där det är betydligt lättare att hitta lösningen.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_2 - x_3 = 1 \\ -4x_3 = 0 \end{cases}$$

Från den tredje ekvationen ser vi nämligen direkt att $x_3 = 0$, vilket insatt i den andra ekvationen ger $x_2 = 1$. Sätter vi slutligen $x_2 = 1$ och $x_3 = 0$ i den första ekvationen, får vi $x_1 = 2$.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_2 - x_3 = 1 \\ -4x_3 = 0 \end{cases}$$

Från den tredje ekvationen ser vi nämligen direkt att $x_3 = 0$, vilket insatt i den andra ekvationen ger $x_2 = 1$. Sätter vi slutligen $x_2 = 1$ och $x_3 = 0$ i den första ekvationen, får vi $x_1 = 2$.

Sammanfattningsvis kan vi skriva lösningen till ekvationssystemet som

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_2 - x_3 = 1 \\ -4x_3 = 0 \end{cases}$$

Från den tredje ekvationen ser vi nämligen direkt att $x_3 = 0$, vilket insatt i den andra ekvationen ger $x_2 = 1$. Sätter vi slutligen $x_2 = 1$ och $x_3 = 0$ i den första ekvationen, får vi $x_1 = 2$.

Sammanfattningsvis kan vi skriva lösningen till ekvationssystemet som

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Exempel

Om vi avser att lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

på samma sätt som i det förra exemplet, så går det inte, eftersom x_1 saknas i den första ekvationen.

Vi kan dock byta plats på t.ex. den första och den andra ekvationen, och därefter fortsätta som ovan:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_2 - 2x_3 & = & 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 & = & -1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 2 \\ x_2 - 2x_3 & = & 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 & = & -1 \end{array} \right.$$

Vi kan dock byta plats på t.ex. den första och den andra ekvationen, och därefter fortsätta som ovan:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_2 - 2x_3 & = & 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 & = & -1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 2 \\ x_2 - 2x_3 & = & 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 & = & -1 \end{array} \right. \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow_{-2} \end{array}$$

Vi kan dock byta plats på t.ex. den första och den andra ekvationen, och därefter fortsätta som ovan:

$$\begin{cases} x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 - 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases} \xrightarrow[-2]{} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 - 2x_3 = 3 \\ -x_2 + 3x_3 = -5 \end{cases}$$

Vi kan dock byta plats på t.ex. den första och den andra ekvationen, och därefter fortsätta som ovan:

$$\begin{cases} x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 - 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow_{-2} \end{matrix} \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 - 2x_3 = 3 \\ -x_2 + 3x_3 = -5 \end{cases} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow_{+} \end{matrix}$$

Vi kan dock byta plats på t.ex. den första och den andra ekvationen, och därefter fortsätta som ovan:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{rcl} x_2 - 2x_3 & = & 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 & = & -1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 2 \\ x_2 - 2x_3 & = & 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 & = & -1 \end{array} \right. \xleftarrow{-2} \iff \\
 & \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 2 \\ x_2 - 2x_3 & = & 3 \\ -x_2 + 3x_3 & = & -5 \end{array} \right. \xleftarrow{+} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 2 \\ x_2 - 2x_3 & = & 3 \\ x_3 & = & -2. \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Detta ekvationssystem kan vi nu lösa genom att sätta in $x_3 = -2$ i den andra ekvationen för att få ut x_2 , o.s.v.

Vi kan dock byta plats på t.ex. den första och den andra ekvationen, och därefter fortsätta som ovan:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases} &\iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 - 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow_{-2} \end{array} \iff \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 - 2x_3 = 3 \\ -x_2 + 3x_3 = -5 \end{cases} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow_{+} \end{array} &\iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_3 = -2. \end{cases} \end{aligned}$$

Detta ekvationssystem kan vi nu lösa genom att sätta in $x_3 = -2$ i den andra ekvationen för att få ut x_2 , o.s.v.

Men vi kan också fortsätta med att eliminera variabler på följande vis:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_3 = -2 \end{cases} \begin{array}{l} \leftarrow_{+} \\ \leftarrow_{-2} \\ \leftarrow \end{array}$$

Vi kan dock byta plats på t.ex. den första och den andra ekvationen, och därefter fortsätta som ovan:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases} &\iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 - 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases} \xrightarrow[-2]{} \iff \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 - 2x_3 = 3 \\ -x_2 + 3x_3 = -5 \end{cases} \xrightarrow{+} &\iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_3 = -2. \end{cases} \end{aligned}$$

Detta ekvationssystem kan vi nu lösa genom att sätta in $x_3 = -2$ i den andra ekvationen för att få ut x_2 , o.s.v.

Men vi kan också fortsätta med att eliminera variabler på följande vis:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_3 = -2 \end{cases} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} + \\ 2 \\ - \end{smallmatrix}} \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = -2 \end{cases}$$

Vi kan dock byta plats på t.ex. den första och den andra ekvationen, och därefter fortsätta som ovan:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases} &\iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 - 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases} \xleftarrow{-2} \iff \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 - 2x_3 = 3 \\ -x_2 + 3x_3 = -5 \end{cases} \xleftarrow{+} &\iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_3 = -2. \end{cases} \end{aligned}$$

Detta ekvationssystem kan vi nu lösa genom att sätta in $x_3 = -2$ i den andra ekvationen för att få ut x_2 , o.s.v.

Men vi kan också fortsätta med att eliminera variabler på följande vis:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_3 = -2 \end{cases} \xleftarrow{+} \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = -2 \end{cases} \xleftarrow{-2}$$

Vi kan dock byta plats på t.ex. den första och den andra ekvationen, och därefter fortsätta som ovan:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases} &\iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 - 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases} \xleftarrow{-2} \iff \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 - 2x_3 = 3 \\ -x_2 + 3x_3 = -5 \end{cases} \xleftarrow{+} &\iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_3 = -2. \end{cases} \end{aligned}$$

Detta ekvationssystem kan vi nu lösa genom att sätta in $x_3 = -2$ i den andra ekvationen för att få ut x_2 , o.s.v.

Men vi kan också fortsätta med att eliminera variabler på följande vis:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_3 = -2 \end{cases} \xleftarrow{+} &\iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = -2 \end{cases} \xleftarrow{-2} \\ &\iff \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = -2. \end{cases} \end{aligned}$$

Exempel

Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$$

Exempel

Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$$

Successiv elimination ger

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \end{cases} \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{-2} \\ \xleftarrow{-4} \end{array} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ -x_2 + 3x_3 = -1 \\ -x_2 + 3x_3 = -4. \end{cases}$$

Exempel

Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$$

Successiv elimination ger

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \end{cases} \begin{array}{c} \xrightarrow{-2} \\ \xleftarrow{-2} \\ \xleftarrow{-4} \end{array} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ -x_2 + 3x_3 = -1 \\ -x_2 + 3x_3 = -4. \end{cases}$$

Vi får ett ekvationssystem, där de två sista ekvationerna motsäger varandra; $-x_2 + 3x_3$ kan inte både vara lika med -1 och -4 .

Ekvationssystemet saknar därför lösning.

Exempel

Betrakta samma ekvationssystem som i det förra exemplet, sånär som på att högerledet i den sista ekvationen ändras från 4 till 7:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$$

Exempel

Betrakta samma ekvationssystem som i det förra exemplet, sånär som på att högerledet i den sista ekvationen ändras från 4 till 7:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 7 \end{array} \right. \begin{array}{c} \xrightarrow{-2} \\ \xrightarrow{-4} \end{array} \iff \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ -x_2 + 3x_3 = -1 \\ -x_2 + 3x_3 = -1. \end{array} \right.$$

Exempel

Betrakta samma ekvationssystem som i det förra exemplet, sånär som på att högerledet i den sista ekvationen ändras från 4 till 7:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 7 \end{array} \right. \begin{array}{c} \xrightarrow{-2} \\ \xrightarrow{-4} \end{array} \iff \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ -x_2 + 3x_3 = -1 \\ -x_2 + 3x_3 = -1. \end{array} \right.$$

Den här gången får vi ett ekvationssystem, där den andra och tredje ekvationen säger precis samma sak! Vi kan därför lika gärna stryka den sista ekvationen, eftersom den inte tillför någon ny information:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ -x_2 + 3x_3 = -1. \end{array} \right.$$

Exempel

Betrakta samma ekvationssystem som i det förra exemplet, sånär som på att högerledet i den sista ekvationen ändras från 4 till 7:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 7 \end{array} \right. \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow -2 \\ \leftarrow -4 \end{array} \iff \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ -x_2 + 3x_3 = -1 \\ -x_2 + 3x_3 = -1. \end{array} \right.$$

Den här gången får vi ett ekvationssystem, där den andra och tredje ekvationen säger precis samma sak! Vi kan därför lika gärna stryka den sista ekvationen, eftersom den inte tillför någon ny information:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ -x_2 + 3x_3 = -1. \end{array} \right.$$

Detta är ett ekvationssystem med oändligt många lösningar, ty för varje värde som vi tilldelar x_3 , t.ex. $x_3 = t$, får vi nämligen från den andra ekvationen att $x_2 = 1 + 3t$. Med $x_2 = 1 + 3t$ och $x_3 = t$ insatt i den första ekvationen, blir slutligen $x_1 = 1 - 2t$.

Vi sammanfattar: Ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$$

har oändligt många lösningar, och dessa kan tecknas på formen

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 2t \\ x_2 = 1 + 3t \\ x_3 = t, \end{cases}$$

där t är ett godtyckligt reellt tal. För varje värde på t får vi en lösning till ekvationssystemet, för t.ex. $t = 2$ får vi lösningen $(x_1, x_2, x_3) = (-3, 7, 2)$. Vi kallar t för en *parameter* och säger att lösningen till ekvationssystemet är *enparametrig* (eftersom vi behöver just *en* parameter för att skriva upp lösningen).

Vi sammanfattar: Ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$$

har oändligt många lösningar, och dessa kan tecknas på formen

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 2t \\ x_2 = 1 + 3t \\ x_3 = t, \end{cases}$$

där t är ett godtyckligt reellt tal. För varje värde på t får vi en lösning till ekvationssystemet, för t.ex. $t = 2$ får vi lösningen $(x_1, x_2, x_3) = (-3, 7, 2)$. Vi kallar t för en *parameter* och säger att lösningen till ekvationssystemet är *enparametrig* (eftersom vi behöver just *en* parameter för att skriva upp lösningen).

Man kan även stöta på lösningar som är *tvåparametriga*, *treparametriga*, o.s.v., beroende på hur många parametrar man behöver för att teckna lösningen. Allmänt: om m parametrar behövs, säger man att man har en *m-parametrig lösning*.

Exempel

Vi ger ett exempel på ett ekvationssystem, där det visar sig att lösningen är tvåparametrig:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 = 1 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 = 9 \\ 3x_1 + 8x_2 - 5x_3 - 8x_4 = -2 \end{cases}$$

Exempel

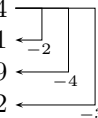
Vi ger ett exempel på ett ekvationssystem, där det visar sig att lösningen är tvåparametrig:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 = 1 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 = 9 \\ 3x_1 + 8x_2 - 5x_3 - 8x_4 = -2 \end{cases} \begin{array}{c} \xrightarrow{-2} \\ \xrightarrow{-4} \\ \xrightarrow{-3} \end{array} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ 7x_2 - 7x_3 - 7x_4 = -7 \\ 7x_2 - 7x_3 - 7x_4 = -7 \\ 14x_2 - 14x_3 - 14x_4 = -14. \end{cases} \end{aligned}$$

Exempel

Vi ger ett exempel på ett ekvationssystem, där det visar sig att lösningen är tvåparametrig:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 = 1 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 = 9 \\ 3x_1 + 8x_2 - 5x_3 - 8x_4 = -2 \end{cases}$$



$$\iff \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ 7x_2 - 7x_3 - 7x_4 = -7 \\ 7x_2 - 7x_3 - 7x_4 = -7 \\ 14x_2 - 14x_3 - 14x_4 = -14. \end{cases}$$

De tre sista ekvationerna är alla ekvivalenta med $x_2 - x_3 - x_4 = -1$. Vi kan därför välja x_3 och x_4 godtyckligt, säg $x_3 = s$ och $x_4 = t$. Då blir $x_2 = -1 + x_3 + x_4 = -1 + s + t$. Från den första ekvationen fås slutligen

$$x_1 = 4 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 4 + 2(-1 + s + t) - 3s - 2t = 2 - s.$$

Vi sammanfattar: Ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 = 1 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 = 9 \\ 3x_1 + 8x_2 - 5x_3 - 8x_4 = -2 \end{cases}$$

har oändligt många lösningar, vilka kan beskrivas av den tvåparametriska framställningen

$$\begin{cases} x_1 = 2 - s \\ x_2 = -1 + s + t \\ x_3 = s \\ x_4 = t, \end{cases}$$

där s och t är godtyckliga reella tal. (Varje val av s och t ger en lösning till ekvationssystemet.)

Om antalet lösningar till ett linjärt ekvationssystem

I de exempel vi studerat, har ett linjärt ekvationssystem antingen haft exakt en lösning, oändligt många lösningar eller inga lösningar alls.

Om antalet lösningar till ett linjärt ekvationssystem

I de exempel vi studerat, har ett linjärt ekvationssystem antingen haft exakt en lösning, oändligt många lösningar eller inga lösningar alls.

Man kan bevisa att detta gäller allmänt:

Sats

Ett linjärt ekvationssystem har antingen

- *en entydig lösning*
- *oändligt många lösningar*
- *inga lösningar.*

Exempel

Undersök för vilka värden på konstanterna a och b som

$$\begin{cases} x + ay - 2z = 3 \\ 2x + y - 3z = b \\ -x \quad \quad + z = 1 \end{cases}$$

har

- exakt en lösning
- oändligt många lösningar
- ingen lösning alls.

Exempel

Undersök för vilka värden på konstanterna a och b som

$$\begin{cases} x + ay - 2z = 3 \\ 2x + y - 3z = b \\ -x + z = 1 \end{cases}$$

har

- exakt en lösning
- oändligt många lösningar
- ingen lösning alls.

Om vi löser detta ekvationssystem med hjälp av Gausselimination, och t.ex. använder den första ekvationen för att eliminera x från de båda andra, kommer konstanten a att "förorena" dessa två ekvationer, vilket gör att systemet blir mer "risigt" att lösa. Vi gör det enklare för oss, om vi ser till så att konstanterna a och b förekommer i så få ekvationer som möjligt.

$$\begin{cases} x + ay - 2z = 3 \\ 2x + y - 3z = b \\ -x + z = 1 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x + ay - 2z = 3 \\ 2x + y - 3z = b \\ -x \quad + \quad z = 1 \end{array} \right. \begin{array}{l} \xleftarrow{+} \\ \xleftarrow{2} \\ \xleftarrow{-} \end{array}$$

Först eliminerar vi x från den första och den andra ekvationen, med hjälp av den tredje.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + ay - 2z = 3 & \xleftarrow{+} & \\ 2x + y - 3z = b & \xleftarrow{2} & \\ -x & + & z = 1 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} ay - z = 4 & & \\ y - z = 2 + b & & \\ -x & + & z = 1 \end{array} \right.$$

Först eliminerar vi x från den första och den andra ekvationen, med hjälp av den tredje.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + ay - 2z = 3 & \xleftarrow{+} & \\ 2x + y - 3z = b & \xleftarrow{2} & \\ -x & + & z = 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} ay - z = 4 & \xleftarrow{-1} & \\ y - z = 2 + b & \xleftarrow{1} & \\ -x & + & z = 1 \end{array} \right.$$

Först eliminerar vi x från den första och den andra ekvationen, med hjälp av den tredje. Sedan eliminerar vi z från den första ekvationen, med hjälp av den andra.

$$\begin{aligned}
 \left\{ \begin{array}{rcl} x + ay - 2z & = & 3 \\ 2x + y - 3z & = & b \\ -x & + & z = 1 \end{array} \right. \begin{array}{l} \xleftarrow{+} \\ \xleftarrow{2} \\ \xleftarrow{1} \end{array} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} ay - z & = & 4 \\ y - z & = & 2 + b \\ -x & + & z = 1 \end{array} \right. \begin{array}{l} \xleftarrow{-1} \\ \xleftarrow{1} \\ \end{array} \\
 \iff \left\{ \begin{array}{rcl} (a-1)y & = & 2-b \\ y - z & = & 2+b \\ -x & + & z = 1 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Först eliminerar vi x från den första och den andra ekvationen, med hjälp av den tredje. Sedan eliminerar vi z från den första ekvationen, med hjälp av den andra.

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{rcl} x + ay - 2z = 3 & \xleftarrow{+} & \\ 2x + y - 3z = b & \xleftarrow{2} & \\ -x & + & z = 1 \end{array} \right. &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} ay - z = 4 & \xleftarrow{-1} & \\ y - z = 2 + b & \xleftarrow{-1} & \\ -x & + & z = 1 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} (a-1)y & = & 2 - b \\ y - z & = & 2 + b \\ -x & + & z = 1 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Först eliminerar vi x från den första och den andra ekvationen, med hjälp av den tredje. Sedan eliminerar vi z från den första ekvationen, med hjälp av den andra.

I ekvationen $(a-1)y = 2-b$ skulle vi kunna lösa ut y och få

$$y = \frac{2-b}{a-1},$$

men för att vi ska kunna göra detta måste $a \neq 1$ (annars dividerar vi med noll!).

$$\begin{cases} x + ay - 2z = 3 \\ 2x + y - 3z = b \\ -x + z = 1 \end{cases} \begin{array}{l} \xleftarrow{+} \\ \xleftarrow{2} \\ \xleftarrow{-1} \end{array} \iff \begin{cases} ay - z = 4 \\ y - z = 2 + b \\ -x + z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} (a-1)y = 2-b \\ y - z = 2+b \\ -x + z = 1 \end{cases}$$

Först eliminerar vi x från den första och den andra ekvationen, med hjälp av den tredje. Sedan eliminerar vi z från den första ekvationen, med hjälp av den andra.

I ekvationen $(a - 1)y = 2 - b$ skulle vi kunna lösa ut y och få

$$y = \frac{2-b}{a-1},$$

men för att vi ska kunna göra detta måste $a \neq 1$ (annars dividerar vi med noll!). Med detta värde på y fås från ekvationen $y - z = 2 + b$ i sin tur att

$$z = y - 2 - b = \frac{2 - b}{a - 1} - 2 - b.$$

Hittills har vi alltså

$$y = \frac{2-b}{a-1} \quad \text{och} \quad z = \frac{2-b}{a-1} - 2 - b.$$

Från den sista ekvationen $-x + z = 1$ i systemet fås slutligen att

$$x = z - 1 = \frac{2-b}{a-1} - 2 - b - 1 = \frac{2-b}{a-1} - 3 - b.$$

Hittills har vi alltså

$$y = \frac{2-b}{a-1} \quad \text{och} \quad z = \frac{2-b}{a-1} - 2 - b.$$

Från den sista ekvationen $-x + z = 1$ i systemet fås slutligen att

$$x = z - 1 = \frac{2-b}{a-1} - 2 - b - 1 = \frac{2-b}{a-1} - 3 - b.$$

Vi har alltså hittat en entydig lösning

$$\begin{cases} x = \frac{2-b}{a-1} - 3 - b \\ y = \frac{2-b}{a-1} \\ z = \frac{2-b}{a-1} - 2 - b \end{cases}$$

till systemet, men detta är *under förutsättningen att $a \neq 1$* .

Genom att utgå från den första ekvationen i systemet

$$\begin{cases} (a-1)y = 2-b \\ y-z = 2+b \\ -x + z = 1 \end{cases}$$

kom vi alltså fram till att om $a \neq 1$, så har systemet entydig lösning.

Genom att utgå från den första ekvationen i systemet

$$\begin{cases} (a-1)y = 2-b \\ y-z = 2+b \\ -x + z = 1 \end{cases}$$

kom vi alltså fram till att om $a \neq 1$, så har systemet entydig lösning.
Vad händer om $a = 1$?

Genom att utgå från den första ekvationen i systemet

$$\begin{cases} (a-1)y = 2-b \\ y-z = 2+b \\ -x + z = 1 \end{cases}$$

kom vi alltså fram till att om $a \neq 1$, så har systemet entydig lösning. Vad händer om $a = 1$? Ekvationssystemet ovan får då utseendet

$$\begin{cases} 0 = 2-b \\ y-z = 2+b \\ -x + z = 1 \end{cases}$$

och vi ser direkt från första ekvationen att vi måste ha $b = 2$, för att det ska finnas någon lösning överhuvudtaget. Om $b \neq 2$ saknas alltså lösningar.

Genom att utgå från den första ekvationen i systemet

$$\begin{cases} (a-1)y = 2-b \\ y-z = 2+b \\ -x + z = 1 \end{cases}$$

kom vi alltså fram till att om $a \neq 1$, så har systemet entydig lösning. Vad händer om $a = 1$? Ekvationssystemet ovan får då utseendet

$$\begin{cases} 0 = 2-b \\ y-z = 2+b \\ -x + z = 1 \end{cases}$$

och vi ser direkt från första ekvationen att vi måste ha $b = 2$, för att det ska finnas någon lösning överhuvudtaget. Om $b \neq 2$ saknas alltså lösningar. Med $b = 2$ så fås ekvationssystemet

$$\begin{cases} y-z = 4 \\ -x + z = 1, \end{cases}$$

som man enkelt ser har oändligt många lösningar. (Skriv dessa på parameterform som övning!)

Vi sammanfattar: Ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + ay - 2z = 3 \\ 2x + y - 3z = b \\ -x + z = 1 \end{cases}$$

har

- exakt en lösning, om $a \neq 1$

Vi sammanfattar: Ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + ay - 2z = 3 \\ 2x + y - 3z = b \\ -x + z = 1 \end{cases}$$

har

- exakt en lösning, om $a \neq 1$
- oändligt många lösningar, om $a = 1$ och $b = 2$

Vi sammanfattar: Ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + ay - 2z = 3 \\ 2x + y - 3z = b \\ -x + z = 1 \end{cases}$$

har

- exakt en lösning, om $a \neq 1$
- oändligt många lösningar, om $a = 1$ och $b = 2$
- inga lösningar alls, om $a = 1$ och $b \neq 2$.

Vi sammanfattar: Ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + ay - 2z = 3 \\ 2x + y - 3z = b \\ -x + z = 1 \end{cases}$$

har

- exakt en lösning, om $a \neq 1$
- oändligt många lösningar, om $a = 1$ och $b = 2$
- inga lösningar alls, om $a = 1$ och $b \neq 2$.

Räkningarna för den här typen av problem tenderar ofta att bli ganska mödosamma, och det är lätt hänt att man räknar fel. Men längre fram i kursen kommer vi få ett verktyg som i regel gör det betydligt enklare att åtminstone bestämma konstanten a i ovanstående exempel.

Under- och överbestämda ekvationssystem

Definition (Under- och överbestämda ekvationssystem)

Ett linjärt ekvationssystem

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$

säges vara

- *underbestämt* om $p < n$ (fler obekanta än ekvationer)

Under- och överbestämda ekvationssystem

Definition (Under- och överbestämda ekvationssystem)

Ett linjärt ekvationssystem

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$

säges vara

- *underbestämt* om $p < n$ (fler obekanta än ekvationer)
- *överbestämt* om $p > n$ (fler ekvationer än obekanta).

Exempel

Ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$$

är underbestämt, medan

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 4 \\ 2x_1 - x_2 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases}$$

är överbestämt.

Exempel

Ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$$

är underbestämt, medan

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 4 \\ 2x_1 - x_2 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases}$$

är överbestämt.

Ett underbestämt ekvationssystem har oftast (men inte alltid) oändligt många lösningar. Ett överbestämt ekvationssystem har oftast (men inte alltid) inga lösningar. Undersök på egen hand hur det ligger till med ekvationssystemen i exemplet ovan!

Homogena och inhomogena ekvationssystem

Definition (Homogena och inhomogena ekvationssystem)

Ett linjärt ekvationssystem

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$

säges vara

- *homogent* om $b_1 = b_2 = \dots = b_p = 0$

Homogena och inhomogena ekvationssystem

Definition (Homogena och inhomogena ekvationssystem)

Ett linjärt ekvationssystem

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$

säges vara

- *homogent* om $b_1 = b_2 = \dots = b_p = 0$
- *inhomogent* om $b_j \neq 0$ för minst ett j .

Homogena och inhomogena ekvationssystem

Definition (Homogena och inhomogena ekvationssystem)

Ett linjärt ekvationssystem

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$

säges vara

- *homogent* om $b_1 = b_2 = \dots = b_p = 0$
- *inhomogent* om $b_j \neq 0$ för minst ett j .

Ett homogent ekvationssystem har alltid minst en lösning, nämligen den *triviala* lösningen $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

Exempel

Studera de två ekvationssystemen

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Det vänstra ekvationssystemet är inhomogent medan det högra är homogent. Lägg märke till att vänsterleden i de båda ekvationssystemen är identiska!

Exempel

Studera de två ekvationssystemen

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Det vänstra ekvationssystemet är inhomogent medan det högra är homogent. Lägg märke till att vänsterleden i de båda ekvationssystemen är identiska!

Vi löser det inhomogena ekvationssystemet:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{-2} \begin{cases} 3x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 2/3 \\ x_2 = 2/3 \end{cases}$$

Exempel

Studera de två ekvationssystemen

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Det vänstra ekvationssystemet är inhomogent medan det högra är homogent. Lägg märke till att vänsterleden i de båda ekvationssystemen är identiska!

Vi löser det inhomogena ekvationssystemet:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{-2} \begin{cases} 3x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 2/3 \\ x_2 = 2/3 \end{cases}$$

och det homogena:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{-2} \begin{cases} 3x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Exempel

Studera de två ekvationssystemen

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Det vänstra ekvationssystemet är inhomogent medan det högra är homogent. Lägg märke till att vänsterleden i de båda ekvationssystemen är identiska!

Vi löser det inhomogena ekvationssystemet:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{-2} \begin{cases} 3x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 2/3 \\ x_2 = 2/3 \end{cases}$$

och det homogena:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{-2} \begin{cases} 3x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Båda ekvationssystemen har exakt en lösning, och för det homogena systemet rör det sig om den triviala lösningen ($x_1 = x_2 = 0$).

Exempel

Nedan finns två inhomogena ekvationssystem med samma vänsterled. Det visar sig att det ena har oändligt många lösningar, medan det andra saknar lösning. Visa detta som en övning!

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = -1 \\ -6x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x_1 - x_2 = -1 \\ -6x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$$

Exempel

Nedan finns två inhomogena ekvationssystem med samma vänsterled. Det visar sig att det ena har oändligt många lösningar, medan det andra saknar lösning. Visa detta som en övning!

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = -1 \\ -6x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_1 - x_2 = -1 \\ -6x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$$

För motsvarande homogena ekvationssystem

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 0 \\ -6x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

är lätt att se att det har oändligt många lösningar. På parameterform kan vi skriva dessa som

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 3t. \end{cases}$$

När vi i de två senaste exemplen stötte på ett inhomogent ekvationssystem som saknade lösning eller hade oändligt många, så hade motsvarande homogena ekvationssystem oändligt många lösningar.

När vi i de två senaste exemplen stötte på ett inhomogent ekvationssystem som saknade lösning eller hade oändligt många, så hade motsvarande homogena ekvationssystem oändligt många lösningar.

Vi såg också att när det inhomogena systemet hade exakt en lösning, så hade motsvarande homogena system också bara en lösning – den triviala.

När vi i de två senaste exemplen stötte på ett inhomogent ekvationssystem som saknade lösning eller hade oändligt många, så hade motsvarande homogena ekvationssystem oändligt många lösningar.

Vi såg också att när det inhomogena systemet hade exakt en lösning, så hade motsvarande homogena system också bara en lösning – den triviala.

Man kan bevisa att detta gäller för ekvationssystem i allmänhet:

Sats

Ett inhomogent linjärt ekvationssystem har exakt en lösning, om och endast om motsvarande homogena ekvationssystem endast har den triviala lösningen.

Exempel

Det homogena ekvationssystemet

$$\begin{cases} -x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 0 \\ 2x_1 + 13x_2 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

har endast den triviala lösningen $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. (Visa detta genom att lösa ekvationssystemet!)

Exempel

Det homogena ekvationssystemet

$$\begin{cases} -x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 0 \\ 2x_1 + 13x_2 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

har endast den triviala lösningen $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. (Visa detta genom att lösa ekvationssystemet!)

Innebörden av föregående sats är, att vilka tal vi än byter ut nollorna i högerleden ovan mot, så får vi ett ekvationssystem som har exakt en lösning. Detta gäller alltså till exempel för

$$\begin{cases} -x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 214801 \\ 2x_1 + 13x_2 = -25,8 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = \sqrt{89}. \end{cases}$$

Föregående sats säger också, att om ett homogent ekvationssystem har oändligt många lösningar, så har ett motsvarande inhomogent ekvationssystem antingen oändligt många lösningar, eller så saknas lösning. Vilket fall som gäller, beror på hur högerleden ser ut.

Föregående sats säger också, att om ett homogent ekvationssystem har oändligt många lösningar, så har ett motsvarande inhomogent ekvationssystem antingen oändligt många lösningar, eller så saknas lösning. Vilket fall som gäller, beror på hur högerleden ser ut.

Exempel

I ett par tidigare exempel konstaterade vi att det inhomogena ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$$

hade oändligt många lösningar, medan

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$$

å sin sida saknade lösning. Det enda som skiljer ekvationssystemen åt ovan, är hur högerleden ser ut, så deras motsvarande homogena ekvationssystem är ett och samma. Detta homogena system måste ha oändligt många lösningar (verifiera detta genom att lösa det!)