

LINNEUNIVERSITETET
Institutionen för datavetenskap,
fysik och matematik
Per-Anders Svensson

Vektorgeometri

Läsanvisningar

Kapitel 8. Diagonalisering av linjära avbildningar

Nedan presenteras läsanvisningar för det åttonde kapitlet i Anders Tengstrands bok, *Linjär algebra med vektorgeometri*.

När du läser i kursboken, kommer du kanske upptäcka att den är upplagd på ett annorlunda sätt, jämfört med hur kursböckerna i matematik ser ut på gymnasiet. Tonvikten ligger här betydligt mer på teori. Resultat sammanfattas i *satser* och *bevisas* i anslutning till dessa. Ett *bevis* kan ses som ett slags förklarande argumentation; i ett antal steg argumenterar man för att ett visst påstående är sant, genom att föra ett logiskt resonemang och hänvisa till tidigare bevisade satser.

Vid en första genomläsning behöver du inte lägga ner energi på att försöka förstå de olika bevisen. Det viktigaste är att du förstår *innebörden* av motsvarande satser. Återvänd dock gärna till bevisen i ett senare läge, när du känner att du har mer ”kött på benen”.

Försök att, samtidigt som du läser texten, göra de rekommenderade övningar som finns angivna nedan. Det finns svar till de flesta av övningarna i facit, längst bak i boken. Det är dock viktigt att du själv har kommit fram till ett svar, innan du tittar i facit. Om du kör du fast så ge inte upp, utan låt uppgiften ligga ett tag, för att återvända till den vid ett senare tillfälle.

De rekommenderade uppgifterna är hämtade från läroboken, men det är lämpligt att du också räknar uppgifter ur övningsboken (Albertson, *Lineär algebra med vektorgeometri, övningsbok*).

8 Diagonalisering av linjära avbildningar

I kapitel 7 har vi sett att varje linjär avbildning kan beskrivas med hjälp av en matris, och att utseendet på denna matris beror på den bas man använder sig av. För ett visst val av bas får matrisen ett extra enkelt utseende; den kan t.ex. bli en diagonalmatris.

Om man från början har en geometrisk beskrivning av den linjära avbildningen, kan man ofta klura ut hur en bas ska se ut för att avbildningens matris ska bli en diagonalmatris i just denna bas. Betrakta t.ex. en linjär avbildning P i form av en ortogonal projektion på ett plan genom origo. Antag att en av basvektorerna e_1 väljes som en normalvektor till detta plan, medan de andra två basvektorerna e_2 och e_3 väljes så att de spänner upp planet. Då kommer e_1 , i egenskap av att vara normalvektor till planet, att avbildas på nollvektorn (normalvektorn kastar ingen

”skugga” på planet vid ortogonal projektion), medan $\mathbf{e}_2$ och $\mathbf{e}_3$ kommer att avbildas på sig själva, eftersom de är parallella med planet. I ovan nämnda bas kommer P därmed representeras av matrisen

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

eftersom kolonnerna i matrisen för en linjär avbildning i tur och ordning är koordinaterna för bilderna av basvektorerna, d.v.s. i det här fallet koordinaterna för $P(\mathbf{e}_1) = \mathbf{0}$, $P(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2$ och $P(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3$.

Ibland kan det dock vara knivigt att luska ut hur en bas ska se ut, för att en given linjär avbildning ska kunna representeras av en diagonalmatris. Vad man då kan göra är att försöka *diagonalisera* den linjära avbildningen. Diagonalisering innebär att man räknar sig fram till en bas i vilken den linjära avbildningen kommer beskrivas av en diagonalmatris. Dessvärre går inte alla linjära avbildningar att diagonalisera, men med hjälp av diagonalisering kan man dock komma en bit på vägen; man kan hitta en bas i vilken matrisen för avbildningen blir ”nästan” en diagonalmatris.

8.1 Egenvärden och egenvektorer

En avbildning säges vara *diagonaliserbar*, om det finns en bas i vilken avbildningen beskrivs av en diagonalmatris. Fundamentala begrepp i samband med diagonalisering är *egenvärden* och *egenvektorer*, se definition 8.1. Exempel 1 illustrerar dessa begrepp, genom att beskriva hur egenvärden och egenvektorer ser ut för en projektion respektive en spegling (i ett plan genom origo). Matrisen för en linjär avbildning, i en bas som utgörs av egenvektorer till den linjära avbildningen ifråga, blir i regel väldigt enkel, speciellt om avbildningen är diagonaliserbar; då blir matrisen nämligen en diagonalmatris.

Det vanligaste sättet att beräkna egenvärden till en linjär avbildning (eller till en matris, som man också säger) är att lösa den s.k. *sekulärekvationen*. Studera gärna härledningen av denna ekvation på sidan 233, och försök förstå varför den ser ut som den gör. Studera vidare exempel 2 och 3.

8.2 Diagonalisering i ortonormerade baser

Med hjälp av diagonalisering kan man alltså hitta en bas i vilken en given linjär avbildning får en ”snäll” matris; eventuellt en diagonalmatris. Basvektorerna i en sådan bas utgörs då av egenvektorer till den linjära avbildningen i fråga.

Under kursens gång har vi vid ett flertal tillfällen sett att saker och ting blir litet enklare att handskas med, om den bas som används är en ON-bas. Vi frågar oss därför om det är möjligt, att bland uppsättningen av egenvektorer som en viss linjär avbildningen har, välja ut ett antal sådana så att de tillsammans bildar en ON-bas? De avbildningar för vilka detta är möjligt, säges vara *symmetriska*. Orsaken till att de kallas så, beror på att de, i vilken ON-bas som helst, alltid kan representeras av en symmetrisk matris; en matris som är lika med sitt eget transponat, se definition 8.2.

Den så kallade *spektralsatsen* (sats 8.2) säger dels att en symmetrisk linjär avbildning alltid är diagonaliserbar, dels att det finns en ON-bas som enbart består av egenvektorer till avbildningen. Satsen har tillämpningar inom bl.a. fysiken.

Sats 8.1 behövs för att kunna bevisa spektralsatsen, men är även intressant i sig: Om två egenvektorer till en symmetrisk linjär avbildning har olika egenvärden, så måste de vara ortogonala.

8.3 Beräkning av potenser av en matris

Problemet att beräkna A^n , där A är en kvadratisk matris och n ett positivt heltal, dyker upp i många olika sammanhang. Om A kan diagonaliseras, så kan vi använda oss av teorin från föregående avsnitt, genom att diagonalisera A till en diagonalmatris D , beräkna D^n (potenser av diagonalmatriser är enkla att beräkna) och slutligen utifrån D^n beräkna A^n . Se exempel 5.

Rekommenderade övningsuppgifter

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 14, 16, 17, 18