

LINNÉUNIVERSITETET
Institutionen för datavetenskap,
fysik och matematik
Per-Anders Svensson

Vektorgeometri

Läsanvisningar

Kapitel 7. Linjära avbildningar

Nedan presenteras läsanvisningar för det sjunde kapitlet i Anders Tengstrands bok, *Linjär algebra med vektorgeometri*.

När du läser i kursboken, kommer du kanske upptäcka att den är upplagd på ett annorlunda sätt, jämfört med hur kursböckerna i matematik ser ut på gymnasiet. Tonvikten ligger här betydligt mer på teori. Resultat sammanfattas i *satser* och *bevisas* i anslutning till dessa. Ett *bevis* kan ses som ett slags förklarande argumentation; i ett antal steg argumenterar man för att ett visst påstående är sant, genom att föra ett logiskt resonemang och hänvisa till tidigare bevisade satser.

Vid en första genomläsning behöver du inte lägga ner energi på att försöka förstå de olika bevisen. Det viktigaste är att du förstår *innebörden* av motsvarande satser. Återvänd dock gärna till bevisen i ett senare läge, när du känner att du har mer ”kött på benen”.

Försök att, samtidigt som du läser texten, göra de rekommenderade övningar som finns angivna nedan. Det finns svar till de flesta av övningarna i facit, längst bak i boken. Det är dock viktigt att du själv har kommit fram till ett svar, innan du tittar i facit. Om du kör du fast så ge inte upp, utan lät uppgiften ligga ett tag, för att återvända till den vid ett senare tillfälle.

De rekommenderade uppgifterna är hämtade från läroboken, men det är lämpligt att du också räknar uppgifter ur övningsboken (Albertson, *Lineär algebra med vektorgeometri, övningsbok*).

7 Linjära avbildningar

Många grundläggande geometriska begrepp såsom t.ex rotationer, speglingar och projektioner kan tolkas med hjälp av så kallade linjära avbildningar, vilket är föremålet för vårt intresse i detta kapitel.

Kapitlet inleds med några exempel på linjära avbildningar. Därefter presenteras den grundläggande teorin för linjära avbildningar. En central sats i den linjära algebran är *dimensionssatsen*, vilken presenteras i avsnitt 7.5.

7.1 Några exempel på avbildningar

I matematikundervisningen har du säkert jobbat en hel del med *funktioner*. Man kan likna en funktion vid en låda med två hål i. Varje gång vi matar in ett tal x i det ena hålet, matas ett tal y ut ur det andra hålet. Inuti själva lådan finns själva funktionen i form av en fastlagd regel, som säger hur y ska räknas ut med hjälp

av x . För t.ex. funktionen $y = f(x) = x^2$, så säger denna regel att vi ska räkna ut y genom att kvadrera x .

En *avbildning* är inom matematiken ett generellare begrepp än funktion (men det förekommer dock att begreppen används synonymt). Liksom för funktioner kan vi föreställa oss en avbildning som en låda med två hål; ett för indata och ett för utdata. Skillnaden är den att in- och utdata till en avbildning inte behöver vara tal; för vår del kommer det att vara *vektorer* i planet eller rummet. Eftersom vi kan identifiera punkter med Ortsvektorer (se avsnitt 3.4) kan vi också tänka oss in- och utdata som *punkter* i planet eller rummet. Den fastlagda regel som finns inuti lådan kan t.ex. vara en rotation med en fix vinkel runt en given rät linje, spegling i ett givet plan, projektion på ett givet plan, etc.

En *linjär* avbildning är en avbildning som har extra trevliga egenskaper; de är enkla att ha att göra med, beroende på att de är möjliga att samordna med räknelagarna för vektorer (addition av vektorer, multiplikation av en vektor med skalär).

Du skall känna till terminologin förknippad med avbildningar (definition 7.1). Studera noggrant de olika exemplen i avsnittet, för att få en känsla för vad en avbildning är. Samtliga avbildningar i de olika exemplen visar sig för övrigt vara linjära.

7.2 Definitioner och grundläggande egenskaper

I detta avsnitt ges definitionen av en linjär avbildning (definition 7.2). Tänk på att $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ är ett nödvändigt (men inte tillräckligt) villkor för att en avbildning F skall vara linjär. Detta innebär att om en avbildning F uppfyller $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ så kan den vara linjär, men den behöver inte vara det. Vet man däremot från början att F är linjär, så måste den uppfylla $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Om $\mathbf{u}$ är en vektor i rummet och F en linjär avbildning av rummets vektorer, så kan problemet med att beräkna $F(\mathbf{u})$ överföras till att beräkna en matrisprodukt $A\mathbf{X}$, där A är en 3×3 -matris och $\mathbf{X}$ en kolonnmatrix, vars element består av koordinaterna för vektorn $\mathbf{u}$, i den bas man för stunden använder sig av. En linjär avbildning kan alltså beskrivas av en matris. Detta är innebörden av sats 7.1. Samma sats säger också att varje matris på ett naturligt sätt kan förknippas med en linjär avbildning.

Ett sätt att plocka fram den matris A som hör samman med en viss linjär avbildning F (av rummets vektorer), är att till dess kolonner välja koordinaterna för vektorerna $F(\mathbf{e}_1)$, $F(\mathbf{e}_2)$ och $F(\mathbf{e}_3)$, där $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ är den bas man använder sig av, se sats 7.2. Men eftersom koordinaterna för en vektor i regel ändras, när man gör ett basbyte (se avsnitt 3.5), så innebär detta att matrisen för F kommer att se annorlunda ut, om man byter bas. Hur utseendet hos en matris för en linjär avbildning förändras vid ett basbyte, beskrivs mer ingående i avsnitt 7.6.

Studera även satsen om volymförändringar vid linjära avbildningar (sats 7.3). Vad denna sats säger, är att om $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ och $\mathbf{u}_3$ är tre vektorer i rummet som spänner upp en parallelepiped med en viss volym, och om F är en linjär avbildning av rummets vektorer, så kommer $F(\mathbf{e}_1)$, $F(\mathbf{e}_2)$ och $F(\mathbf{e}_3)$ också att spänna upp en parallelepiped med en viss annan volym. Förhållandet mellan de olika volymerna kan uttryckas med hjälp av determinanten för den matris, som är förknippad med den linjära avbildningen i fråga (på det sätt som beskrivits ovan).

7.3 Sammansättning av linjära avbildningar

Om man sätter samman två linjära avbildningar F och G , d.v.s. först beräknar $\mathbf{v} = G(\mathbf{u})$, och därefter $\mathbf{w} = F(\mathbf{v}) = F(G(\mathbf{u}))$, så får man en ny linjär avbildning som man brukar beteckna $F \circ G$. Den matris som svarar mot denna sammansättning visar sig vara produkten av matriserna för de två avbildningarna. Detta är innebörden av sats 7.4. Avsnittet innehåller två illustrativa exempel, där man dels sätter samman en spegling med en rotation (exempel 9), dels en spegling med en projektion (exempel 10).

7.4 Inversen till en linjär avbildning

Lär dig vad som menas med *injektiva*, *surjektiva* och *bijektiva* avbildningar (definition 7.3). I definition 7.4 definieras begreppet *invers* till en bijektiv linjär avbildning (det är bara bijektiva avbildningar som kan ha inverser). Inversen F^{-1} till en bijektiv linjär avbildning F går så att säga "baklänges", jämfört med F . Om t.ex. F betyder en rotation medsols med en fix vinkel, runt en punkt i planet, så är F^{-1} en rotation runt samma punkt med samma vinkel, fast motsols istället.

Om den linjära avbildningen F har en invers F^{-1} , så kommer även denna att vara linjär. Alltså kan man förknippa den med en matris. Om F har matrisen A i någon bas, så visar sig F^{-1} ha matrisen A^{-1} i samma bas. Med andra ord måste matrisen för en bijektiv linjär avbildning vara inverterbar, eftersom A^{-1} ju annars inte existerar. Detta är en del av innebörden av sats 7.6, som är väldigt central. Den sammanfattar det mesta av innehållet i kursen, och kan på sätt och vis kallas för "spindeln i nätet".

7.5 Nollrum och värderum. Dimensionssatsen

Lär dig definitionerna av *nollrum* respektive *värderum* för en linjär avbildning av rummet. Vad betyder dessa begrepp geometriskt? Hur ser värderum respektive nollrum för en projektion av rummets vektorer på ett plan?

Dimensionssatsen är en av de verkligt centrala satserna i den linjära algebran. Studera denna noggrant (försök dig gärna på även beviset). Lär dig hur du tar fram en bas för nollrummet respektive värderummet för en linjär avbildning.

7.6 Matrisframställningar av linjära avbildningar i olika baser

Som vi redan varit inne på, beror utseendet på den matris som hör till en linjär avbildning, på vilken bas man använder sig av. Ibland kan det vara bättre att studera en linjär avbildning i en annan bas än den som är given från början, helt enkelt för att matrisen har ett enklare utseende i den andra basen; den kan t.ex. bli en diagonalmatris.

Sambandet mellan matrisrepresentationerna för en linjär avbildning i två olika baser ges i sats 7.8. Exempel 14 ger en bra illustration av denna sats.

7.7 Isometriska avbildningar

En *isometrisk* avbildning bevarar avstånd (vilket hörs på namnet; isometrisk betyder ungefär "lika avstånd"). En sådan avbildning bevarar också vinklar. En matris

för en isometrisk avbildning är ortogonal, om vi jobbar i en ON-bas (se sats 7.9).

Lär dig vilka möjliga isometriska avbildningar det finns av planet. Detta utreds på sidan 224-225. Du behöver inte kunna motsvarande för isometriska avbildningar av rummet, vilket sammanfattas i sats 7.10; läs endast detta som en orientering.

Rekommenderade övningsuppgifter

1, 2, 3, 6, 8, 9, 11, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 28,
29, 31, 32