

Vektorgeometri

Läsanvisningar

Kapitel 5. Areor, vektorprodukter, volymer och determinanter

Nedan presenteras läsanvisningar för det femte kapitlet i Anders Tengstrands bok, *Linjär algebra med vektorgeometri*.

När du läser i kursboken, kommer du kanske upptäcka att den är upplagd på ett annorlunda sätt, jämfört med hur kursböckerna i matematik ser ut på gymnasiet. Tonvikten ligger här betydligt mer på teori. Resultat sammanfattas i *satser* och *bevisas* i anslutning till dessa. Ett *bevis* kan ses som ett slags förklarande argumentation; i ett antal steg argumenterar man för att ett visst påstående är sant, genom att föra ett logiskt resonemang och hänvisa till tidigare bevisade satser.

Vid en första genomläsning behöver du inte lägga ner energi på att försöka förstå de olika bevisen. Det viktigaste är att du förstår *innebörden* av motsvarande satser. Återvänd dock gärna till bevisen i ett senare läge, när du känner att du har mer ”kött på benen”.

Försök att, samtidigt som du läser texten, göra de rekommenderade övningar som finns angivna nedan. Det finns svar till de flesta av övningarna i facit, längst bak i boken. Det är dock viktigt att du själv har kommit fram till ett svar, innan du tittar i facit. Om du kör du fast så ge inte upp, utan låt uppgiften ligga ett tag, för att återvända till den vid ett senare tillfälle.

De rekommenderade uppgifterna är hämtade från läroboken, men det är lämpligt att du också räknar uppgifter ur övningsboken (Albertson, *Lineär algebra med vektorgeometri, övningsbok*).

5 Areor, vektorprodukter, volymer och determinanter

I detta kapitel kommer vi att definiera ytterligare ett antal sätt att räkna med vektorer på. Dessa sätt visar sig vara mycket användbara. Bland annat får vi med hjälp av dessa ett sätt att avgöra om en matris är inverterbar eller inte, utan att behöva ge sig på att lösa ett ekvationssystem med matrisen ifråga som koefficientmatris.

5.1 Inledning

Detta avsnitt ger en kort introduktion till vad kapitlet handlar om. Läs igenom.

5.2 Areaberäkningar

Sats 5.1 i detta avsnitt beskriver hur man beräknar arean av en parallelogram som spänns upp av två vektorer i planet. I avsnittet definieras också vad som menas med en *determinant* av ordning 2. Observera att determinanten utgör ett tal, som såväl som på tecknet (positivt eller negativt) anger arean av en viss parallelogram, enligt sats 5.1.

5.3 Vektorprodukt

I kapitel 4 introducerades begreppet skalärprodukt, som ett sätt att multiplicera vektorer. Om vi skalärmultiplicerar två vektorer, får vi som resultat ett tal (en skalär), därav namnet *skalärprodukt*. *Vektorprodukt* är ett annat sätt att multiplicera två vektorer, vilket introduceras i detta avsnitt. Som namnet antyder, så blir resultatet av en *vektorprodukt* en vektor. Denna skillnad mellan skalär- och vektorprodukt är mycket viktig. Definitionen av vektorprodukt ges i definition 5.2. För att förstå definitionen måste vi känna till begreppet *orientering* av tre vektorer i rummet, se definition 5.1.

Vektorprodukten är lite speciell jämfört med vanlig multiplikation; bland annat gäller räknelagen

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}.$$

Sats 5.2 anger de räkneregler som finns för vektorprodukten. Om vektorerna är givna i en positivt orienterad ON-bas så finns det ett enkelt sätt att beräkna deras vektorprodukt. Sats 5.3 beskriver hur man går till väga då.

Vektorprodukt kan användas för att beräkna arean av en parallelogram som spänns upp av två vektorer i *rummet* (precis vad determinanten av ordning 2 kan användas till i planet). Beräkna några olika vektorprodukter så att du får upp känslan för hur man gör.

5.4 Volymberäkningar

I detta avsnitt skall vi beräkna volymen av en parallelepiped, vilket kan göras med den så kallade *volymfunktionen*. En parallelepiped är ett skevt rätblock, där motstående sidor är parallella. Volymen av en parallelepiped som spänns upp av tre vektorer i rummet kan beräknas, genom att kombinera vektorprodukt och skalärprodukt, på det sätt som beskrivs i sats 5.4. I avsnittet definieras också en determinant av ordning 3. Om vektorerna är givna i en positivt orienterad ON-bas så kan vi beräkna volymen av en parallelepiped med hjälp av determinanten; determinanten är nämligen lika med parallelepipedens volym, såväl som på tecknet (positivt eller negativt). En minnesregel för att beräkna determinanter av ordning 3 är *Sarrus' regel*. Lär dig denna!

Determinanter har en stor betydelse inom många områden i matematiken. I detta avsnitt har vi bara använt dem för volymberäkning. Senare i detta kapitel kommer du se exempel på en del andra användningsområden.

5.5 Egenskaper hos volymfunktionen och determinanten

Sats 5.6 innehåller några räkneregler för volymfunktionen. Dessa är indirekt också räkneregler för determinanter av ordning 3. Lär dig satserna 5.8, 5.9 och 5.10. Den

sistnämnda satsen ger oss en enkel metod för att avgöra om tre vektorer är linjärt beroende.

5.6 Determinanter och linjära ekvationssystem

I det här avsnittet kopplas determinanter till linjära ekvationssystem: Om A är en kvadratisk matris, så har ekvationssystemet $AX = B$ entydig lösning, om och endast om $\det(A) \neq 0$. Som en följd av detta får vi att A är inverterbar, om och endast om $\det(A) \neq 0$. Ytterligare ekvivalenta egenskaper finns i sats 5.11. Sats 5.12 är också viktig. Studera de olika exemplen i avsnittet.

Rekommenderade övningsuppgifter

2, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 27,
28, 29, 32, 33, 34, 37, 38, 39