

LINNEUNIVERSITETET  
Institutionen för datavetenskap,  
fysik och matematik  
Per-Anders Svensson

# Vektorgeometri

## Läsanvisningar

### Kapitel 3. Vektorer i planet och i rummet

Nedan presenteras läsanvisningar för det tredje kapitlet i Anders Tengstrands bok, *Linjär algebra med vektorgeometri*.

När du läser i kursboken, kommer du kanske upptäcka att den är upplagd på ett annorlunda sätt, jämfört med hur kursböckerna i matematik ser ut på gymnasiet. Tonvikten ligger här betydligt mer på teori. Resultat sammanfattas i *satser* och *bevisas* i anslutning till dessa. Ett *bevis* kan ses som ett slags förklarande argumentation; i ett antal steg argumenterar man för att ett visst påstående är sant, genom att föra ett logiskt resonemang och hänvisa till tidigare bevisade satser.

Vid en första genomläsning behöver du inte lägga ner energi på att försöka förstå de olika bevisen. Det viktigaste är att du förstår *innebörden* av motsvarande satser. Återvänd dock gärna till bevisen i ett senare läge, när du känner att du har mer ”kött på benen”.

Försök att, samtidigt som du läser texten, göra de rekommenderade övningar som finns angivna nedan. Det finns svar till de flesta av övningarna i facit, längst bak i boken. Det är dock viktigt att du själv har kommit fram till ett svar, innan du tittar i facit. Om du kör du fast så ge inte upp, utan låt uppgiften ligga ett tag, för att återvända till den vid ett senare tillfälle.

De rekommenderade uppgifterna är hämtade från läroboken, men det är lämpligt att du också räknar uppgifter ur övningsboken (Albertson, *Lineär algebra med vektorgeometri, övningsbok*).

### 3 Vektorer i planet och i rummet

Detta kapitel tar upp vektorbegreppet som du har nytta av i resten av kursen. Vi kommer bland annat se att linjära ekvationssystem, där antalet variabler är två eller tre, kan ges en geometrisk tolkning i två respektive tre dimensioner. Så länge man håller sig till två dimensioner, säger man att man arbetar ”i planet”. Har vi att göra med tre dimensioner, säger vi att vi håller till ”i rummet”.

Omvänt finns det geometriska frågeställningar (i planet respektive i rummet), som överförs till problemet att lösa ett linjärt ekvationssystem (med två respektive tre variabler).

#### 3.1 Något om algebraiska och geometriska metoder

Detta avsnitt tjänar som en introduktion till det vi skall ägna oss åt i detta kapitel. Läs igenom.

### 3.2 Vektorbegreppet

Viktiga begrepp i detta avsnitt är *riktad sträcka* och *vektor*. Vilket samband råder mellan dessa två begrepp? Vad menas med en *nollsträcka* respektive *nollvektor*?

Efter att vi i definition 3.1 har definierat vad som menas med en vektor, går vi igenom vad som menas med summan av två vektorer respektive produkten mellan en vektor och ett tal (en skalär). Eftersom vektorer är ett relativt abstrakt begrepp, är det viktigt att ha figurer att tänka tillbaka på för att underlätta förståelsen. Studera därför figur 3.3 och 3.4 som beskriver dessa räkneoperationer. Lär dig sats 3.1; den sammanfattar räknereglerna för vektorer. Övertyga dig om att dessa regler är sanna. Studera exempel 1–3; de är nyttiga övningar i vektortänkande.

Vektorer brukar ofta betecknas med bokstäver som  $u$ ,  $v$  eller  $w$ . För att vara extra tydlig ser man ibland i litteraturen, att man dessutom skriver variablerna i fetstil, d.v.s. som  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  respektive  $\mathbf{w}$ . Detta är för att man inte ska förväxla vektorer med tal, som betecknas med bokstäver som inte är skrivna i fetstil. Genom att använda fetstil för att beteckna vektorer kommer t.ex. nollvektorn att tecknas  $\mathbf{0}$  istället för 0 (som det görs i boken). Vi kommer i läsanvisningar och föreläsningssanteckningar använda beteckningssättet med fetstil.

### 3.3 Bas, koordinatsystem och koordinater

Detta avsnitt innehåller ett antal definitioner. Det är viktigt att du lär dig dessa. Begreppet *bas* är grundläggande inom vektorgeometrin. En bas är en uppsättning av vektorer med vars hjälp man kan uttrycka varje annan vektor (i planet eller rummet), med hjälp av så kallade *koordinater*. Studera de olika figurerna noggrant.

### 3.4 Linjärkombination. Linjärt beroende och linjärt oberoende

I planet är det tillräckligt att två vektorer är icke-parallella, för att de skall utgöra en bas för planet. I rummet är det inte lika lätt. Vi att kunna beskriva vad som krävs för att en uppsättning av vektorer ska utgöra en bas i rummet, inför vi begrepp som *linjärt beroende*, *linjärt oberoende* och *linjärkombination*. Sats 3.3 är av stor vikt. En tillämpning av denna sats ges i exempel 8.

På mitten av sidan 96 sammanfattas i fyra punkter vad som ska gälla för att en uppsättning av ett visst antal vektorer ska vara linjärt beroende. Har man dessa punkter i minnet kan man undvika onödigt räknande. Sats 3.4 är av stor vikt. Försök dig gärna på att förstå beviset. Exempel 9 illustrerar mycket av det som går igenom i detta avsnitt.

### 3.5 Basbyte

I det inledande exempel 10 ställs vi inför ett problem som är väldigt vanligt när man räknar med vektorer. Ofta har man från början givet en viss bas, men det är inte alltid den är direkt skraddarsydd för det aktuella problem man har att lösa. Då kan man göra ett *basbyte*; temporärt byter vi till en annan bas, i vilken problemet blir enklare att handskas med.

Med hjälp av matriser kan vi beskriva hur koordinaterna för en vektor i en viss bas ändras, om man byter till en annan bas. Den matris  $T$  som förekommer i sats 3.5 har denna egenskap. Det samband som beskriver byte av baser är mycket

viktigt. I skenet av exempel 10 kan vi se att vissa problem blir betydligt enklare att lösa i en viss bas. Då är det bra att kunna byta bas på ett smidigt sätt för att förenkla beräkningarna. Exempel 12 beskriver precis vad ett basbyte handlar om. Resten av avsnittet är en generalisering av detta exempel.

Det kan för övrigt vara bra att ha papper och penna till hands när du läser detta avsnitt, så att du kan fylla i alla luckor som finns i beräkningarna. En fördel att på egen hand fylla i utelämnade detaljer är nämligen att det underlättar förståelsen. Det gäller inte bara det som går igenom detta avsnitt, utan gäller allmänt när man studerar matematik.

### **Rekommenderade övningsuppgifter**

1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 13, 17, 22, 25, 26, 27, 29, 31, 33, 38, 39