Bevis. Vi erhåller genom kommutationslagen och distributionslagen (sats 1.15):

$$\begin{aligned}\mathbf{u}+\mathbf{v} &= u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3 + v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3 = \\ &\quad (u_1+v_1)\mathbf{e}_1 + (u_2+v_2)\mathbf{e}_2 + (u_3+v_3)\mathbf{e}_3, \\ \lambda\mathbf{u} &= \lambda(u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3) = \lambda u_1\mathbf{e}_1 + \lambda u_2\mathbf{e}_2 + \lambda u_3\mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

Detta innebär att $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ har koordinaterna $(u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3)$ och $\lambda\mathbf{u}$ har koordinaterna $(\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3)$ □

Ovanstående sats innebär att vi kan räkna komponentvis när basen fixerats, dvs. vi kan utföra all addition och multiplikation med skalära operationer utan att behöva referera till den geometriska tolkningen.

Exempel 1.21 Om $\mathbf{u} = (2,1,3)$ och $\mathbf{v} = (-1,4,2)$ i någon bas så är

$$3\mathbf{u} - 2\mathbf{v} = 3(2,1,3) - 2(-1,4,2) = (6,3,9) - (-2,8,4) = (8,-5,5).$$

Vi sammanfattar det ovanstående i följande definitioner:

Definition 1.22 Två vektorer $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}$ utgör en bas i planet om de är icke-parallella. En godtycklig vektor $\mathbf{a}$ i planet kan då skrivas på formen

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 = (a_1,a_2)$$

där koordinaterna a_1, a_2 med avseende på basen $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}$ är entydigt bestämda. Vektorerna $a_1\mathbf{e}_1$ och $a_2\mathbf{e}_2$ i ovanstående representation kallas vektorn $\mathbf{a}$:s komponenter med avseende på basen $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}$.

Definition 1.23 Tre vektorer $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ utgör en bas i rymden omm de ligger i skilda plan. En godtycklig vektor $\mathbf{a}$ i ~~planet~~ rymden kan då skrivas på formen

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 = (a_1,a_2,a_3)$$

där koordinaterna a_1, a_2, a_3 med avseende på basen $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ är entydigt bestämda. Vektorerna $a_1\mathbf{e}_1$, $a_2\mathbf{e}_2$ $a_3\mathbf{e}_3$ i ovanstående representation kallas vektorn $\mathbf{a}$:s komponenter med avseende på basen $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$.

© FÖRFATTAREN OCH STUDENTLITTERATUR

baser kan deriveringsoperatorn $A_{\text{diff}} : (P_5 \mapsto P_4)$ och integreringsoperatorn $A_{\text{int}} : (P_4 \mapsto P_5)$ representeras med matriserna

$$A_{\text{diff}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ och } A_{\text{int}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Verifiera att A_{diff} är vänsterinvers till A_{int} och att A_{int} är högerinvers till A_{diff}. Verifiera dessutom att de inte är varandras inverser.

Övning 12.9 Om V och W är underrum i ett vektorrum E så definieras summan $V + W$ genom

$$V + W = \{\mathbf{x} \in E | \mathbf{x} = \mathbf{v} + \mathbf{w}, \text{ med } \mathbf{v} \in V \text{ och } \mathbf{w} \in W\}.$$

Om V är kolonnrummet för en $m \times n$-matris A och W är kolonnrummet för en $m \times p$-matris B så är $V + W$ kolonnrummet för den sammanfogade matrisen $Q = (A\ B)$. Det gäller då att $\dim(V + W) = \text{rang}(Q)$. Varför? Bestäm en bas i summan $V + W$ när V spänns upp av $\mathbf{v}_1 = (1,1,0,0)^T$ och $\mathbf{v}_2 = (1,0,1,0)^T$ samt när W spänns upp av $\mathbf{w}_1 = (0,1,0,1)^T$ och $\mathbf{w}_2 = (0,0,1,1)^T$. Bestäm även en bas för $V \cap W$ och verifiera följande allmängiltiga samband:

$$\dim(V + W) + \dim(V \cap W) = \dim V + \dim W. \tag{12.2}$$

Övning 12.10 `[Tentamen200005XX]` Bestäm dimensionerna för

$$U_1 \cap U_2 \text{ och } U_1 + U_2$$

för de underrum i $\mathbf{R}^4$ som definieras av

$$U_1 = \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

© FÖRFATTAREN OCH STUDENTLITTERATUR

Vi kan nu införa begreppet *projektion på underrum.*

Definition 13.13 Vektorerna v och w i föregående sats kallas vektorn x:s projektion på V respektive W.

Vi tillämpar slutligen en stor del av det vi lärt oss i beviset av följande sats.

Sats 13.14 *För varje $m \times n$-matris A gäller att det till varje vektor $b \in R(A)$ finns precis en vektor $x \in R(A^T)$ så att $Ay = b$.*

Bevis. Tag $\mathbf{b} \in R(A)$. Enligt definitionen av kolonnrum finns en vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ så att $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Enligt den linjära algebrans huvudsats och sats 13.12 så kan vi uppenbarligen skriva $\mathbf{x} = \mathbf{x}_r + \mathbf{x}_n$ med $\mathbf{x}_r \in R(A^T)$ och $\mathbf{x}_n \in N(A)$. Vi har alltså att

$$\mathbf{b} = A\mathbf{x} = A(\mathbf{x}_r + \mathbf{x}_n) = A\mathbf{x}_r + A\mathbf{x}_n = A\mathbf{x}_r.$$

Antag nu som antites att det även finns en annan vektor $\mathbf{x}_r'$ med

$$A\mathbf{x}_r' = \mathbf{b}.$$

Vi får i sådana fall

$$A(\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_r') = A\mathbf{x}_r - A\mathbf{x}_r' = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

vilket innebär att $\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_r' \in N(A)$. Men $\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_r'$ befinner sig samtidigt i $R(A^T)$. Alltså gäller $(\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_r', \mathbf{x}_r - \mathbf{x}_r') = 0$ och definition 13.1(IVa) ger att $\mathbf{x}_r = \mathbf{x}_r'$. □

13.3 Övningar

Övning 13.1 [Tentamen20200113] Beräkna vinkeln mellan vektorerna $(-1,1,-1,-1)^T$ och $(1,1,1,3)^T$.

Övning 13.2 [Tentamen20170225] Avgör om vinkeln mellan vektorerna $(1,2,3,4)^T$ och $(-1,1,4,-3)^T$ är spetsig, rät, eller trubbig.

© FÖRFATTAREN OCH STUDENTLITTERATUR

Ortonormerade baser och ortonormering

I slutet av föregående kapitel såg vi att de formler som beskrev minsta kvadratmetoden förenklades betydligt när vi använde ortonormerade baser. Ett par exempel på detta var bland annat projektionsmatrisen på matrisen A:s kolonnrum

$$P = A(A^TA)^{-1}A^T.$$

Om de vektorer som utgjorde kolonnerna i A var ortonormerade så var A^T matrisen A:s vänsterinvers och vi erhöll $P = AA^T$. Inte nog med det, projektionerna på var och en av A:s kolonner kunde beräknas var för sig och slås ihop för att få den sökta projektionen (sats 14.15). En annan egenskap märkte vi direkt efter (2.10). När koordinaterna skall beräknas i en ortonormerad bas så inträffar en separation automatiskt vilket innebär att var och en av koordinaterna kan beräknas för sig oberoende av de andra. Om vektorn $\mathbf{b}$ skall skrivas med hjälp av koordinater i den ortonormerade basen $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_n$ enligt

$$\mathbf{b} = \mathbf{q}_1x_1 + \mathbf{q}_2x_2 + \cdots + \mathbf{q}_nx_n \tag{15.1}$$

så blir tillvägagångssättet att multiplicera (15.1) med den basvektor $\mathbf{q}_i$ som vi önskar koordinaten för. Vi får

$$\mathbf{q}_i^T\mathbf{b} = x_i$$

och koordinaten x_i är därmed bestämd oberoende av de övriga koordinaterna. Med matristerminologi skriver vi detta som ekvationssystemet $Q\mathbf{x} = \mathbf{b}$. I detta fall är inversen till Q trivial att beräkna och ges av $Q^{-1} = Q^T$ och vi får lösningen $\mathbf{x} = Q^T\mathbf{b}$. Vi har nu anledning att införa begreppet *ortogonal* matris. Det vore kanske naturligare att tala om ortonormerade matriser men begreppet är dessvärre etablerat.

© FÖRFATTAREN OCH STUDENTLITTERATUR

får

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_j^T\mathbf{v}_{p+1} &= \mathbf{v}_j^T\left(\mathbf{a}_{p+1}-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\mathbf{v}_i^T\mathbf{a}_{p+1}}{\mathbf{v}_i^T\mathbf{v}_i}\mathbf{v}_i\right)=\mathbf{v}_j^T\mathbf{a}_{p+1}-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\mathbf{v}_i^T\mathbf{a}_{p+1}}{\mathbf{v}_i^T\mathbf{v}_i}\mathbf{v}_j^T\mathbf{v}_i\\ &= \mathbf{v}_j^T\mathbf{a}_{p+1}-\mathbf{v}_j^T\mathbf{a}_{p+1}=0.\end{aligned}$$

Därmed är $\mathbf{v}_{p+1}$ ortogonal mot $\mathbf{v}_j$, $j = 1,2,\ldots,p$ och induktion ger att $\mathbf{v}_i$, $i = 1,2,\ldots,n$ är parvis ortogonala. Eftersom $\mathbf{v}_i$, $i = 1,2,\ldots,n$ är parvis ortogonala så är det linjärt oberoende enligt sats 13.7. Vi får $R(V) = R(A)$. □

Vi visar med ett exempel hur man rent praktiskt går tillväga.

Exempel 15.5 De linjärt oberoende vektorerna

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_1 &= (1,1,1,1)^T,\\ \mathbf{a}_2 &= (-1,1,1,1)^T \text{ och}\\ \mathbf{a}_3 &= (1,0,-2,2)^T\end{aligned}$$

spänner upp ett tredimensionellt underrum i $\mathbf{R}^4$. Bestäm en ortonormerad bas för detta underrum.

Lösning. Vi får $\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1$. Sedan fås

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1 = (1,1,1,1)^T$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_2-\frac{\mathbf{v}_1^T\mathbf{a}_2}{\mathbf{v}_1^T\mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{2}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{a}_3-\frac{\mathbf{v}_1^T\mathbf{a}_3}{\mathbf{v}_1^T\mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1-\frac{\mathbf{v}_2^T\mathbf{a}_3}{\mathbf{v}_2^T\mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\2\end{pmatrix}-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+\frac{\frac{3}{2}}{3}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\-\frac{5}{2}\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}.$$

© FÖRFATTAREN OCH STUDENTLITTERATUR

Vi lägger märke till att $\|\mathbf{v}_1\| = 2$, $\|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{3}$ och att $\|\mathbf{v}_3\| = \sqrt{35}/2$. Därmed har vi $\mathbf{q}_1 = \frac{1}{2}(1,1,1,1)^T$, $\mathbf{q}_2 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}})^T$ och slutligen att $\mathbf{q}_3 = (0, -\frac{1}{\sqrt{35}}, -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}, \frac{3}{\sqrt{35}})^T$. □

Gram-Schmidts ortonormeringsförfarande ger upphov till ytterligare en matrisfaktorisering. Denna faktorisering kallas QR-faktorisering. Om vi skriver de givna vektorerna i ovanstående exempel som linjärkombinationer av de givna vektorerna (detta kan alltid göras) så får vi

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_1 &= \mathbf{v}_1 = 2\mathbf{q}_1, \\
\mathbf{a}_2 &= \mathbf{v}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_1 = \mathbf{q}_1 + \sqrt{3}\mathbf{q}_2, \\
\mathbf{a}_3 &= \mathbf{v}_3 + \frac{1}{4}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{q}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{q}_2 + \frac{\sqrt{35}}{2}\mathbf{q}_3.
\end{aligned}$$

Detta kan återges på matrisformen

$$A = (\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3) = (\mathbf{q}_1\ \mathbf{q}_2\ \mathbf{q}_3)\begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{35}}{2} \end{pmatrix} = QR.$$

Ovanstående faktorisering visar att minsta kvadratmetoden är ett paradexempel på förenkling av formler genom ortonormering. Betrakta det möjligen inkonsistenta systemet

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

och ortonormera matrisen A:s kolonner genom faktoriseringen $A = QR$. De ortonormerade kolonnerna återfinns nu i matrisen Q. Normalekvationerna ges nu av

$$A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$$

och vi får efter ortonormering

$$R^T(Q^TQ)R\mathbf{x} = (QR)^TQR\mathbf{x} = (QR)^T\mathbf{b} = R^TQ^T\mathbf{b}.$$

Vi ser att Q^T är Q:s vänsterinvers och att R är en inverterbar matris. Därmed är även R^T en inverterbar matris (sats 9.5). Vi får systemet

$$R\mathbf{x} = Q^T\mathbf{b} \tag{15.4}$$

© FÖRFATTAREN OCH STUDENTLITTERATUR

Allmänna likformighetsavbildningar

Vi träffade på likformighetsavbildningar för första gången i avsnitt 11.2 och konstaterade att likformighetsavbildningar representerar basbyten. Vissa baser kan vara betydligt fördelaktigare än andra beträffande analys av linjära avbildningar. Ett extremfall representeras naturligtvis av en diagonalisering i de fall matrisen är diagonaliserbar.

Frågan är nu vad vi gör i de fall som matrisen inte är diagonaliserbar och hur långt vi kan driva frågorna i de fallen. Icke-diagonaliserbara fall är ovanliga i den meningen att de är icke-generiska. Sannolikheten att vi har dubbelrötter eller rötter av högre ordning i en karakteristisk ekvation och dessutom råkar få ett fall där vi inte har en komplett uppsättning med egenvektorer är noll ifall vi slumpmässigt väljer ut element i en matris.

Problemet är emellertid att utveckling av tekniska system sällan svarar mot att bara slumpmässigt välja ett antal element i någon matris. Vi vill ju gärna välja vår matris på något intelligent sätt i syfte att t.ex. optimera eller trimma systemet på något sätt. Detta konstaterade vi redan i slutet av avsnitt 11.4. Orsakerna till att vi vill betrakta likformighetsavbildningar i ett mer allmänt perpektiv kan variera, vi har redan konstaterat att vi kan ha icke-diagonaliserbara fall, dvs. egenvektormatrisen saknas. Men den kan även vara svår att beräkna eller så kan det i ifrågavarande sammanhang vara mer ändamålsenligt att använda någon annan likformighetsavbildning än den som svarar mot egenvektormatrisen.

Låt oss därför betrakta de kvadratiska och likformiga matriserna A och MAM^{-1}. Två viktiga frågor uppstår nu.

(a) Vad har matriserna A och MAM^{-1} gemensamt?

(b) Om matrisen M väljes på något speciellt sätt, vad förväntar vi oss i så fall av matrisen MAM^{-1}?

Sats 11.8 ger åtminstone ett delsvar på den första frågan: Likformiga matriser

© FÖRFATTAREN OCH STUDENTLITTERATUR

Matrisen B är triangulär och egenvärdet $\lambda = 1$ har en egenvektor $(1,0,0)^T$. Matrisens Jordanform J_B skall alltså uppfylla relationen $BM = MJ_B$ som antar formen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_4 \\ 0 & x_2 & x_5 \\ 0 & x_3 & x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_4 \\ 0 & x_2 & x_5 \\ 0 & x_3 & x_6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Elementvis så innebär detta $x_3 = 0$, $x_2 = 1$, $x_6 = 1$, $x_1 = x_5 + 2$. Variablerna x_4 och x_5 är fria och kan väljas till nollor. Vi får likformighetsrelationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

I fallet C svarar två egenvektorer mot egenvärdet $\lambda = 1$ och dessa ges av $(1,0,0)^T$ respektive $(0,-1,1)^T$. Vi vet i detta fall inte vilken av egenvektorerna som skall kopplas till den saknade egenvektorn och det beroende mellan ekvationerna som inte kan elimineras. Likformighetsrelationen ges alltså antingen av

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x_1 & 0 \\ 0 & x_2 & -1 \\ 0 & x_3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & 0 \\ 0 & x_2 & -1 \\ 0 & x_3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eller

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x_1 & 0 \\ 0 & x_2 & -1 \\ 0 & x_3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & 0 \\ 0 & x_2 & -1 \\ 0 & x_3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

där det ~~senare~~ första fallet leder till en motsägelse. I det ~~första~~ senare fallet får vi att x_1 är fri samtidigt som $x_2 + x_3 = 1$. För att få basbytesmatrisen att innehålla så många nollor som möjligt och bli så triangulär som möjligt så kan vi alltså välja $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ och $x_3 = 0$. Likformighetsrelationen ges nu av

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

© FÖRFATTAREN OCH STUDENTLITTERATUR

Övning 18.4 [Tentamen20030313] Antag att A är positivt definit och att $AM + M^H A = -I$. Visa att om x är en egenvektor till M och λ är motsvarande egenvärde så gäller att $\mathrm{Re}\lambda < 0$. Denna uppgift anknyter till en standardmetod för konstruktion av Ljapunovfunktioner för linjära differentialekvationssystem.

Övning 18.5 Verifiera att $\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = \mathbf{x}^H A\mathbf{y}$ är en inre produkt om A är en positivt definit Hermitsk matris.

Övning 18.6 Verifiera att de egenvektorer som var kopplade till det generaliserade egenvärdesproblemet i exempel 18.15 är M-ortogonala.

Övning 18.7 Lös det generaliserade egenvärdesproblemet

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Övning 18.8 [Tentamen20000818] Undersök om det är möjligt att diagonalisera

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} \text{ och } A = \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 16 & 29 \end{pmatrix}$$

samtidigt. Ange diagonalformerna.

Övning 18.9 * [Tentamen20010601] Låt A vara en positivt definit $n \times n$-matris med med elementen a_{ij}. Visa att $\det A \leq a_{11}a_{22} \cdot \cdots \cdot a_{nn}$. Ledning: Faktorisera $A = R^H R$ genom att välja något kvadratiskt R och volymtolka determinanten.

Anmärkning 19.10 En singulärvärdesuppdelning förser matrisen A:s samtliga fyra fundamentala underrum (jämför avsnitt 12.3) med unitära (i det reella fallet ortonormerade) baser. Det följer från $AV = U\Sigma$ att de $n - r$ sista vektorerna i V utgör en unitär (i det reella fallet ortonormerad) bas i A:s nollrum $N(A)$ medan de r kvarvarande vektorerna i V utgör en bas i A:s Hermitska transponats kolonnrum $R(A^H)$ (jämför linjära algebrans huvudsats, sats 13.11). På samma sätt följer det ur $A^H U = V\Sigma$ att de $m - r$ sista kolonnerna i U utgör en unitär bas i A:s Hermitska transponats nollrum $N(A^H)$ medan de kvarvarande r kolonnerna i U utgör en unitär bas i A:s kolonnrum $R(A)$.

Bevis. Antag först att $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ är en unitär bas av egenvektorer till $A^H A$ ordnad enligt storleken på motsvarande egenvärden. Vi har att

$$(A\mathbf{v}_i)^H(A\mathbf{v}_j) = \mathbf{v}_i^H A^H A\mathbf{v}_j = \sigma_j^2 \mathbf{v}_i^H \mathbf{v}_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \sigma_i^2 & i = j \end{cases}$$

Därmed är $A\mathbf{v}_1, \ldots, A\mathbf{v}_n$ ortogonala, och $A\mathbf{v}_1, \ldots, A\mathbf{v}_r$ linjärt oberoende och befinner sig i A:s kolonnrum, $R(A)$. Vidare gäller att

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} = A\sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{n} c_i A\mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{r} c_i A\mathbf{v}_i.$$

Detta innebär att $A\mathbf{v}_1, \ldots, A\mathbf{v}_r$ bildar en ortogonal bas i $R(A)$. Vi normerar denna bas och sätter

$$\mathbf{u}_i = \frac{A\mathbf{v}_i}{\|A\mathbf{v}_i\|} = \frac{A\mathbf{v}_i}{\sigma_i}.$$

Detta innebär att

$$A\mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i,\ i = 1, \ldots, r. \tag{19.8}$$

Vi utvidgar nu (använd Gram Schmidts förfarande om nödvändigt) $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$ till en unitär bas $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$ i R^m. Därmed är $U = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m)$ och $V = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ unitära matriser. Enligt (19.8) gäller att

$$AV = (A\mathbf{v}_1, \ldots, A\mathbf{v}_r, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}) = (\sigma_1 \mathbf{u}_1, \ldots, \sigma_r \mathbf{u}_r, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}).$$

Om nu Σ är en diagonalmatris sådan att de första r diagonalelementen svarar mot A:s singulära värden så gäller att $U\Sigma = AV$, dvs. $A = U\Sigma V^H$. □

© FÖRFATTAREN OCH STUDENTLITTERATUR

Slutligen är det inte svårt att koppla det sista kriteriet (d) till ovanstående implikationskedja. Vi börjar med implikationen (e) ⇒ (a) och skriver

$$\mathbf{x}^H A\mathbf{x} = \mathbf{x}^H R^H R\mathbf{x} = \|R\mathbf{x}\|^2 \geq 0.$$

Eftersom R har linjärt oberoende kolonner så gäller att $R\mathbf{x} = \mathbf{o} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{o}$. Detta är ekvivalent med $\mathbf{x} \neq \mathbf{o} \Rightarrow R\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$. Att den kvadratiska formen är positivt definit följer nu av definition 16.4(Na). Lägg märke till att matrisen A automatiskt blir Hermitsk om den kan skrivas på formen $A = R^H R$, jämför sats 14.3.

Vi avslutar nu med implikationen (a) ⇒ (e). Om (a) gäller så gäller (d) och därmed ger radförenkling att

$$A = LDL^H = L\sqrt{D}\sqrt{D}^H L^H = L\sqrt{D}(L\sqrt{D})^H.$$

Ett fungerande förslag är alltså $R = \sqrt{D}^H L^H$. □

Anmärkning 18.7 Lägg märke till att möjligheterna att skriva den positivt definita matrisen på formen $R^H R$ inte bara begränsar sig till vårt förslag ovan. Vi kan lika gärna få en annan faktorisering genom diagonalisering enligt

$$A = Q\Lambda Q^H = Q\sqrt{\Lambda}\sqrt{\Lambda}^H Q^H = (Q\sqrt{\Lambda})(Q\sqrt{\Lambda})^H.$$

Alla ovanstående förslag är naturligtvis förslag på kvadratiska matriser. Ett rektangulärt förslag kan skapas genom att multiplicera vilken fungerande kvadratisk matris R som helst med vilken icke-kvadratisk matris Q som helst som har ortonormerade kolonner:

$$(QR)^H(QR) = R^H Q^H QR = R^H IR = R^H R = A.$$

Exempel 18.8 Vi återgår till tvåvariabelfallet (18.1) och kontrollerar hur de olika villkoren kommer till uttryck i den symmetriska matrisen

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Övning 19.3 Visa att $||A|| = ||A^T||$.

Övning 19.4 Betrakta matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix}.$$

Beräkna baser i $R(A)$, $N(A)$, $R(A^H)$ och $N(A^H)$ dels genom att använda metoderna i avsnitt 12.3, dels genom att använda en singulärvärdeuppdelning. Verifiera att $R(A)$ och $N(A^H)$ är varandras ortogonala komplement samtidigt som $R(A^H)$ och $N(A)$ är varandras ortogonala komplement.

Övning 19.5 Betrakta diagonalmatrisen Σ med reella diagonalelement. Om vi transponerar den och inverterar alla diagonalelement så får vi dess pseodoinvers Σ^-. Singulärvärdeuppdelningen $A = U\Sigma V^H$ av varje matris kan nu användas för att skapa en *pseudoinvers* $A^- = V\Sigma^- U^H$ till varje matris A. Bestäm en pseudoinvers A^- till matrisen A i minsta kvadratproblemet i övning 14.10 och bilda vektorn $A^-\mathbf{b}$. Jämför med lösningsmängden till övning 14.10. Beräkna den lösning i lösningsmängden som har kortast avstånd till origo. Vad märker du?

Övning 19.6 (Datorlabb i bildbehandling) Singulärvärdesuppdelningar har en underbar egenskap att kunna urskilja det väsentliga i stora datamängder. Bilder brukar lagras i stora $m \times n$-matriser. En singulärvärdesuppdelning av den stora matrisen kan skrivas som

$$A = U\Sigma V^H = \sum_{i=1}^{r} \mathbf{u}_i \sigma_i \mathbf{v}_i^H$$

där en stor del av de singulära värdena kan vara relativt små. Man kan då ta med endast de största singulära värdena i summan så att vi inte behöver lagra lika mycket data. Testa med någon bild, singulärvärdeuppdela, tag med bara det största singulära värdet, sedan stegvis några till och identifiera när bilden framträder med önskvärd tydlighet. Ledning: MatLab har färdiga rutiner för

© FÖRFATTAREN OCH STUDENTLITTERATUR

12.4

Vektorerna utgör ett underrum.

12.5

Vektorerna $(1,0,0,0)^T$ och $(4,2,0,0)^T$ är basvektorer till kolonnrummet för matrisen U. En matris A med echelonformen U (den givna matrisen) som har ett annat kolonnrum är t.ex.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 2 & 10 & 8 \end{pmatrix}.$$

Denna matris har ett kolonnrum som spänns upp av $(1,0,1,2)^T$ och $(4,2,6,10)^T$ vilket inte är identiskt med det rum som spänns upp av $(1,0,0,0)^T$ och $(4,2,0,0)^T$.

12.6

En bas i kolonnrummet utgörs av $(1,1,0)^T$ och $(3,4,1)^T$. En bas i radrummet urgörs av $(0,1,2,3,4)$ och $(0,0,0,1,2)$. Vektorerna $(1,0,0,0,0)^T$, $(0,-2,1,0,0)^T$, $(0,2,0,-2,1)^T$ utgör en bas i $N(A)$. En bas i A:s vänsternollrum ges av $(1,-1,1)$.

12.7

Om vi betecknar matriserna för $F \circ G$ och $G \circ F$ med A respektive B så gäller att

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 30 \end{pmatrix} \text{ och } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

~~Båda avbildningarna är surjektiva~~. Endast $F \circ G$ är injektiv.

och surjektiv

© FÖRFATTAREN OCH STUDENTLITTERATUR

15.2

En ortonormerad bas i planet ges av $\mathbf{q}_1^T = (1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0)$ och $\mathbf{q}_2^T = (-1/\sqrt{6},1/\sqrt{6},2/\sqrt{6})$. Projektionsmatrisen ges av

$$P = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Nollrummet till matrisen P spänns upp av $(1, -1,1)$.

15.3

$\mathbf{q}_1 = (1/3,2/3, -2/3)^T$, $\mathbf{q}_2 = (2/3,1/3,2/3)^T$, $\mathbf{q}_3 = (-2/3,2/3,1/3)^T$. A:s vänsternollrum. Lösningen till minsta kvadratproblemet är $x_2 = 2$ och $x_1 = 1$.

15.4

$$\begin{aligned} q_1(x) &= \frac{1}{\|1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ q_2(x) &= \frac{x}{\|x\|} = \sqrt{\frac{3}{2}}x, \\ q_3(x) &= \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\|x - \frac{1}{3}\|} = \sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right), \\ q_4(x) &= \frac{x^3 - \frac{3}{5}x}{\|x^3 - \frac{3}{5}x\|} = \sqrt{\frac{175}{8}}\left(x^3 - \frac{3}{5}x\right). \end{aligned}$$

© FÖRFATTAREN OCH STUDENTLITTERATUR