baser kan deriveringsoperatorn $A_{\text{diff}} : (P_5 \mapsto P_4)$ och integreringsoperatorn $A_{\text{int}} : (P_4 \mapsto P_5)$ representeras med matriserna

$$A_{\text{diff}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ och } A_{\text{int}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Verifiera att A_{diff} är vänsterinvers till A_{int} och att A_{int} är högerinvers till A_{diff}. Verifiera dessutom att de inte är varandras inverser.

Övning 12.9 Om V och W är underrum i ett vektorrum E så definieras summan $V + W$ genom

$$V + W = \{\mathbf{x} \in E | \mathbf{x} = \mathbf{v} + \mathbf{w}, \text{ med } \mathbf{v} \in V \text{och } \mathbf{w} \in W\}.$$

Om V är kolonnrummet för en $m \times n$-matris A och W är kolonnrummet för en $m \times p$-matris B så är $V + W$ kolonnrummet för den sammanfogade matrisen $Q = (A\ B)$. Det gäller då att $\dim(V + W) = \text{rang}(Q)$. Varför? Bestäm en bas i summan $V + W$ när V spänns upp av $\mathbf{v}_1 = (1,1,0,0)^T$ och $\mathbf{v}_2 = (1,0,1,0)^T$ samt när W spänns upp av $\mathbf{w}_1 = (0,1,0,1)^T$ och $\mathbf{w}_2 = (0,0,1,1)^T$. Bestäm även en bas för $V \cap W$ och verifiera följande allmängiltiga samband:

$$\dim(V + W) + \dim(V \cap W) = \dim V + \dim W. \tag{12.2}$$

Övning 12.10 `[Tentamen200005XX]` Bestäm dimensionerna för

$$U_1 \cap U_2 \text{ och } U_1 + U_2$$

för de underrum i $\mathbf{R}^4$ som definieras av

$$U_1 = \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4 & = & 0, \\ x_3 - x_4 & = & 0 \end{cases}$$

Vi kan nu införa begreppet *projektion på underrum.*

Definition 13.13 Vektorerna $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ i föregående sats kallas vektorn $\mathbf{x}$:s projektion på V respektive W.

Vi tillämpar slutligen en stor del av det vi lärt oss i beviset av följande sats.

Sats 13.14 *För varje $m \times n$-matris A gäller att det till varje vektor $\mathbf{b} \in R(A)$ finns precis en vektor $\cancel{\mathbf{x}}$ y $\in R(A^T)$ så att $A\mathbf{y} = \mathbf{b}$.*

Bevis. Tag $\mathbf{b} \in R(A)$. Enligt definitionen av kolonnrum finns en vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ så att $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Enligt den linjära algebrans huvudsats och sats 13.12 så kan vi uppenbarligen skriva $\mathbf{x} = \mathbf{x}_r + \mathbf{x}_n$ med $\mathbf{x}_r \in R(A^T)$ och $\mathbf{x}_n \in N(A)$. Vi har alltså att

$$\mathbf{b} = A\mathbf{x} = A(\mathbf{x}_r + \mathbf{x}_n) = A\mathbf{x}_r + A\mathbf{x}_n = A\mathbf{x}_r.$$

Antag nu som antites att det även finns en annan vektor $\mathbf{x}_r'$ med

$$A\mathbf{x}_r' = \mathbf{b}.$$

Vi får i sådana fall

$$A(\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_r') = A\mathbf{x}_r - A\mathbf{x}_r' = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

vilket innebär att $\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_r' \in N(A)$. Men $\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_r'$ befinner sig samtidigt i $R(A^T)$. Alltså gäller $(\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_r', \mathbf{x}_r - \mathbf{x}_r') = 0$ och definition 13.1(IVa) ger att $\mathbf{x}_r = \mathbf{x}_r'$. □

13.3 Övningar

Övning 13.1 `[Tentamen20200113]` Beräkna vinkeln mellan vektorerna $(-1,1,-1,-1)^T$ och $(1,1,1,3)^T$.

Övning 13.2 `[Tentamen20170225]` Avgör om vinkeln mellan vektorerna $(1,2,3,4)^T$ och $(-1,1,4,-3)^T$ är spetsig, rät, eller trubbig.

Ortonormerade baser och ortonormering

I slutet av föregående kapitel såg vi att de formler som beskrev minsta kvadratmetoden förenklades betydligt när vi använde ortonormerade baser. Ett par exempel på detta var bland annat projektionsmatrisen på matrisen A:s kolonnrum

$$P = A(A^T A)^{-1} A^T.$$

Om de vektorer som utgjorde kolonnerna i A var ortonormerade så var A^T matrisen A:s vänsterinvers och vi erhöll $P = AA^T$. Inte nog med det, projektionerna på var och en av A:s kolonner kunde beräknas var för sig och slås ihop för att få den sökta projektionen (sats 14.15). En annan egenskap märkte vi direkt efter (2.10). När koordinaterna skall beräknas i en ortonormerad bas så inträffar en separation automatiskt vilket innebär att var och en av koordinaterna kan beräknas för sig oberoende av de andra. Om vektorn $\mathbf{b}$ skall skrivas med hjälp av koordinater i den ortonormerade basen $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_n$ enligt

$$\mathbf{b} = \mathbf{q}_1 x_1 + \mathbf{q}_2 x_2 + \cdots + \mathbf{q}_n x_n \tag{15.1}$$

så blir tillvägagångssättet att multiplicera (15.1) med den basvektor $\mathbf{q}_i$ som vi önskar koordinaten för. Vi får

$$\mathbf{q}_i^T \mathbf{b} = x_i$$

och koordinaten x_i är därmed bestämd oberoende av de övriga koordinaterna. Med matristerminologi skriver vi detta som ekvationssystemet $Q\mathbf{x} = \mathbf{b}$. I detta fall är inversen till Q trivial att beräkna och ges av $Q^{-1} = Q^T$ och vi får lösningen $\mathbf{x} = Q^T\mathbf{x}$. Vi har nu anledning att införa begreppet *ortogonal* matris. Det vore kanske naturligare att tala om ortonormerade matriser men begreppet är dessvärre etablerat.

får

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_j^T\mathbf{v}_{p+1} &= \mathbf{v}_j^T\left(\mathbf{a}_{p+1} - \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\mathbf{v}_i^T\mathbf{a}_{p+1}}{\mathbf{v}_i^T\mathbf{v}_i}\mathbf{v}_i\right) = \mathbf{v}_j^T\mathbf{a}_{p+1} - \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\mathbf{v}_i^T\mathbf{a}_{p+1}}{\mathbf{v}_i^T\mathbf{v}_i}\mathbf{v}_j^T\mathbf{v}_i \\
&= \mathbf{v}_j^T\mathbf{a}_{p+1} - \mathbf{v}_j^T\mathbf{a}_{p+1} = 0.
\end{aligned}$$

Därmed är $\mathbf{v}_{p+1}$ ortogonal mot $\mathbf{v}_j$, $j = 1,2,\dots,p$ och induktion ger att $\mathbf{v}_i$, $i = 1,2,\dots,n$ är parvis ortogonala. Eftersom $\mathbf{v}_i$, $i = 1,2,\dots,n$ är parvis ortogonala så är det linjärt oberoende enligt sats 13.7. Vi får $R(V) = R(A)$. □

Vi visar med ett exempel hur man rent praktiskt går tillväga.

Exempel 15.5 De linjärt oberoende vektorerna

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_1 &= (1,1,1,1)^T, \\
\mathbf{a}_2 &= (-1,1,1,1)^T \text{ och} \\
\mathbf{a}_3 &= (1,0,-2,2)^T
\end{aligned}$$

spänner upp ett tredimensionellt underrum i $\mathbf{R}^4$. Bestäm en ortonormerad bas för detta underrum.

Lösning. Vi får $\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1$. Sedan fås

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \mathbf{a}_1 = (1,1,1,1)^T \\
\mathbf{v}_2 &= \mathbf{a}_2 - \frac{\mathbf{v}_1^T\mathbf{a}_2}{\mathbf{v}_1^T\mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{2}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} \\
\mathbf{v}_3 &= \mathbf{a}_3 - \frac{\mathbf{v}_1^T\mathbf{a}_3}{\mathbf{v}_1^T\mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{v}_2^T\mathbf{a}_3}{\mathbf{v}_2^T\mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\\2\end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{\frac{3}{2}}{3}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}1\\0\\-2\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac14\\\frac14\\\frac14\\\frac14\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac34\\\frac14\\\frac14\\\frac14\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\\cancel{-\frac{1}{2}}\ 0\\-\cancel{\frac{5}{2}}\ 2\\2\ \cancel{\frac{3}{2}}\end{pmatrix}. = \begin{pmatrix}0\\0\\-2\\2\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Vi lägger märke till att $||\mathbf{v}_1|| = 2$, $||\mathbf{v}_2|| = \sqrt{3}$ och att $||\mathbf{v}_3|| = \cancel{\sqrt{35}/2}$ $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Därmed har vi $\mathbf{q}_1 = \frac{1}{2}(1,1,1,1)^T$, $\mathbf{q}_2 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}})^T$ och slutligen att $\mathbf{q}_3 =$ $\cancel{(0, -\frac{1}{\sqrt{35}}, -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}, \frac{3}{\sqrt{35}})^T}$. $= (0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$ □

Gram-Schmidts ortonormeringsförfarande ger upphov till ytterligare en matrisfaktorisering. Denna faktorisering kallas QR-faktorisering. Om vi skriver de givna vektorerna i ovanstående exempel som linjärkombinationer av de givna vektorerna (detta kan alltid göras) så får vi

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_1 &= \mathbf{v}_1 = 2\mathbf{q}_1, \\
\mathbf{a}_2 &= \mathbf{v}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_1 = \mathbf{q}_1 + \sqrt{3}\mathbf{q}_2, \\
\mathbf{a}_3 &= \mathbf{v}_3 + \frac{1}{4}\mathbf{v}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{v}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{q}_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{q}_2 + \cancel{\frac{\sqrt{35}}{2}}\, 2\sqrt{2}\,\mathbf{q}_3.
\end{aligned}$$

Detta kan återges på matrisformen

$$A = (\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3) = (\mathbf{q}_1\ \mathbf{q}_2\ \mathbf{q}_3)\begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & \cancel{\frac{\sqrt{35}}{2}}\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} = QR.$$

Ovanstående faktorisering visar att minsta kvadratmetoden är ett paradexempel på förenkling av formler genom ortonormering. Betrakta det möjligen inkonsistenta systemet

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

och ortonormera matrisen A:s kolonner genom faktoriseringen $A = QR$. De ortonormerade kolonnerna återfinns nu i matrisen Q. Normalekvationerna ges nu av

$$A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$$

och vi får efter ortonormering

$$R^T(Q^T Q)R\mathbf{x} = (QR)^T QR\mathbf{x} = (QR)^T\mathbf{b} = R^T Q^T\mathbf{b}.$$

Vi ser att Q^T är Q:s vänsterinvers och att R är en inverterbar matris. Därmed är även R^T en inverterbar matris (sats 9.5). Vi får systemet

$$R\mathbf{x} = Q^T\mathbf{b} \tag{15.4}$$

om det svarar mot flera linjärt oberoende egenvektorer. Två matriser är likformiga om och endast om de har samma Jordanform när hänsyn inte tas till blockmatrisernas ordningsföljd.

Exempel 17.9 Bestäm den Jordanmatris som är likformig med matriserna

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ och } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

och de likformighetsavbildningar som relaterar de givna matriserna med Jordanmatriserna.

Lösning. Vi har att

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) + 1 = (\lambda - 2)^2 = 0.$$

Det finns en egenvektor som svarar mot egenvärdet $\lambda = 2$ och den är $(1,1)^T$. Den Jordanblockmatris som är likformig med matrisen A antar alltså formen

$$J_A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Matriserna A och J_A är likformiga och därmed relaterade enligt

$$AM = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = MJ_A.$$

Elementvis så betyder detta att $2 = 2$, $a + b = 1 + 2a$ och $-a + 3b = 1 + 2b$ som är ekvivalent med att $a = b - 1$. Vi väljer värdet på den fria parametern så att så många nollor som möjligt uppstår i basbytesmatrisen och trimmar dessutom valet så att den om möjligt blir nedåt eller uppåt triangulär. Därmed blir eventuella inverteringar enklare och ett bra exempel är $b = 1$. Den sökta likformighetsrelationen ges alltså av

$$AM = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = MJ_A.$$

Övning 18.4 `[Tentamen20030313]` Antag att A är positivt definit och att $AM + M^H A = -I$. Visa att om x är en egenvektor till M och λ är motsvarande egenvärde så gäller att $\mathrm{Re}\lambda < 0$. Denna uppgift anknyter till en standardmetod för konstruktion av Ljapunovfunktioner för linjära differentialekvationssystem.

Övning 18.5 Verifiera att $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle = \mathrm{x}^H A \mathrm{y}$ är en inre produkt om A är en positivt definit Hermitsk matris.

Övning 18.6 Verifiera att de egenvektorer som var kopplade till det generaliserade egenvärdesproblemet i exempel 18.15 är M-ortogonala.

Övning 18.7 Lös det generaliserade egenvärdesproblemet

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Övning 18.8 `[Tentamen20000818]` Undersök om det är möjligt att diagonalisera

$$M = \begin{pmatrix} \overset{4}{\cancel{2}} & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} \text{ och } A = \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 16 & 29 \end{pmatrix}$$

samtidigt. Ange diagonalformerna.

Övning 18.9 * `[Tentamen20010601]` Låt A vara en positivt definit $n \times n$-matris med med elementen a_{ij}. Visa att $\det A \leq a_{11} a_{22} \cdot \cdots \cdot a_{nn}$. Ledning: Faktorisera $A = R^H R$ genom att välja något kvadratiskt R och volymtolka determinanten.

Anmärkning 19.10 En singulärvärdesuppdelning förser matrisen A:s samtliga fyra fundamentala underrum (jämför avsnitt 12.3) med unitära (i det reella fallet ortonormerade) baser. Det följer från $AV = U\Sigma$ att de $n - r$ sista vektorerna i V utgör en unitär (i det reella fallet ortonormerad) bas i A:s nollrum $N(A)$ medan de r kvarvarande vektorerna i V utgör en bas i A:s Hermitska transponats kolonnrum $R(A^H)$ (jämför linjära algebrans huvudsats, sats 13.11). På samma sätt följer det ur $A^H U = V\Sigma$ att de $m - r$ sista kolonnerna i U utgör en unitär bas i A:s Hermitska transponats nollrum $N(A^H)$ medan de kvarvarande r kolonnerna i U utgör en unitär bas i A:s kolonnrum $R(A)$.

Bevis. Antag först att $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ är en unitär bas av egenvektorer till $A^H A$ ordnad enligt storleken på motsvarande egenvärden. Vi har att

$$(A\mathbf{v}_i)^H (A\mathbf{v}_j) = \mathbf{v}_i^H A^H A\mathbf{v}_j = \sigma_j^2 \mathbf{v}_i^H \mathbf{v}_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \sigma_i^2 & i = j \end{cases}$$

Därmed är $A\mathbf{v}_1, \ldots, A\mathbf{v}_n$ ortogonala, och $A\mathbf{v}_1, \ldots, A\mathbf{v}_r$ linjärt oberoende och befinner sig i A:s kolonnrum, $R(A)$. Vidare gäller att

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} = A\sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{n} c_i A\mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{r} c_i A\mathbf{v}_i.$$

Detta innebär att $A\mathbf{v}_1, \ldots, A\mathbf{v}_r$ bildar en ortogonal bas i $R(A)$. Vi normerar denna bas och sätter

$$\mathbf{u}_i = \frac{A\mathbf{v}_i}{||A\mathbf{v}_i||} = \frac{A\mathbf{v}_i}{\sigma_i}.$$

Detta innebär att

$$A\mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i, \; i = 1, \ldots, r. \tag{19.8}$$

Vi utvidgar nu (använd Gram Schmidts förfarande om nödvändigt) $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$ till en unitär bas $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$ i $\mathbf{R}^m$. Därmed är $U = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m)$ och $V = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ unitära matriser. Enligt (19.8) gäller att

$$AV = (A\mathbf{v}_1, \ldots, A\mathbf{v}_r, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}) = (\sigma_1 \mathbf{u}_1, \ldots, \sigma_r \mathbf{u}_r, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}).$$

Om nu Σ är en diagonalmatris sådan att de första r diagonalelementen svarar mot A:s singulära värden så gäller att $U\Sigma = AV$, dvs. $A = U\Sigma V^H$. □

Övning 19.3 Visa att $\|A\| = \|A^{\overset{H}{\cancel{T}}}\|$.

Övning 19.4 Betrakta matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix}.$$

Beräkna baser i $R(A)$, $N(A)$, $R(A^H)$ och $N(A^H)$ dels genom att använda metoderna i avsnitt 12.3, dels genom att använda en singulärvärdeuppdelning. Verifiera att $R(A)$ och $N(A^H)$ är varandras ortogonala komplement samtidigt som $R(A^H)$ och $N(A)$ är varandras ortogonala komplement.

Övning 19.5 Betrakta diagonalmatrisen Σ med reella diagonalelement. Om vi transponerar den och inverterar alla diagonalelement så får vi dess pseodoinvers Σ^-. Singulärvärdeuppdelningen $A = U\Sigma V^H$ av varje matris kan nu användas för att skapa en *pseudoinvers* $A^- = V\Sigma^- U^H$ till varje matris A. Bestäm en pseudoinvers A^- till matrisen A i minsta kvadratproblemet i övning 14.10 och bilda vektorn $A^-\mathbf{b}$. Jämför med lösningsmängden till övning 14.10. Beräkna den lösning i lösningsmängden som har kortast avstånd till origo. Vad märker du?

Övning 19.6 (Datorlabb i bildbehandling) Singulärvärdesuppdelningar har en underbar egenskap att kunna urskilja det väsentliga i stora datamängder. Bilder brukar lagras i stora $m \times n$-matriser. En singulärvärdesuppdelning av den stora matrisen kan skrivas som

$$A = U\Sigma V^H = \sum_{i=1}^{r} \mathbf{u}_i \sigma_i \mathbf{v}_i^H$$

där en stor del av de singulära värdena kan vara relativt små. Man kan då ta med endast de största singulära värdena i summan så att vi inte behöver lagra lika mycket data. Testa med någon bild, singulärvärdeuppdela, tag med bara det största singulära värdet, sedan stegvis några till och identifiera när bilden framträder med önskvärd tydlighet. Ledning: MatLab har färdiga rutiner för

15.2

En ortonormerad bas i planet ges av $\mathbf{q}_1^T = (1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0)$ och $\mathbf{q}_2^T = (-1/\sqrt{6},1/\sqrt{6},2/\sqrt{6})$. Projektionsmatrisen ges av

$$P = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Nollrummet till matrisen P spänns upp av $(1,-1,1)$.

15.3

$\mathbf{q}_1 = (1/3,2/3,-2/3)^T$, $\mathbf{q}_2 = (2/3,1/3,2/3)^T$, $\mathbf{q}_3 = (-2/3,2/3,1/3)^T$. A:s vänsternollrum. Lösningen till minsta kvadratproblemet är $x_2 = 2$ och $x_1 = 1$.

15.4

$$\begin{aligned}
q_1(x) &= \frac{1}{||1||} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\
q_2(x) &= \frac{x}{||x||} = \sqrt{\frac{3}{2}}x, \\
q_3(x) &= \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{||x - \frac{1}{3}||} = \sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^{2} - \frac{1}{3}\right), \\
q_4(x) &= \frac{x^3 - \frac{3}{5}x}{||x^3 - \frac{3}{5}x||} = \sqrt{\frac{175}{8}}\left(x^3 - \frac{3}{5}x\right).
\end{aligned}$$

19.5

Pseudoinversen ges

$$A^{-} = \frac{1}{9\,\cancel{11}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vi har att

$$A^{-}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Vektorn $A^{-}\mathbf{b}$ sammanfaller med den lösningsvektor som har kortast avstånd till origo.

19.6

Om den matris som bifogades i uppgiften används så borde ett resultat i enlighet med figurerna dyka upp. Vi har lagt svarta stjärnor vid ettorna i originalbilden och svarta stjänor i de singulärvärdesuppdelade bilderna om motsvarande värde i matrisen överstiger $\frac{1}{2}$. Vi ser att de fem största singulära värdena (av tio) räcker till för att den behandlade bilden skall bli identisk med den givna, jämför figur C.8(a) med figur C.9(b). Redan med fyra singulära värden är det bara ett fåtal detaljer som saknas, se figur C.9(a).

20.1

(a) -5.

(b) 8.

(c) Nej!

(d) 1,2,3,4.

(e) (0,0,0).

(f) Saknar lösningar.

